Topoi og Logik

Et Fagprojekt om
Sammenhængen mellem Topoi og Intuitionistisk Højere Ordens Logik

af **Morten Overgaard Hansen**
`moh@math.ku.dk`
og **Bodil Biering**
`bodil@hotmail.com`

IT-Højskolen i København (IT-C)
Efteråret 2001
Vejleder: Lars Birkedal

Indledning

Dette er et fagprojekt skrevet i forlængelse af kurset *Kategoriteori* på IT-C. Projektet omhandler en bestemt type af kategorier, kaldet topoi, og sammenhængen mellem disse kategorier og Intuitionistisk Højere Ordens Logik (IHOL). Fra kurset Kategoriteori kendes begrebet cartesisk afsluttet kategori, som er en del af definitionen på en topos. Vi har desuden i kurset beskæftiget os med sammenhængen mellem kategoriteori og logik, nemlig den del af IHOL som udgør *regulær logik*.

Vi har i projektet lagt vægten på at give et grundigt bevis for den ene del af sammenhængen (Soundness) mellem topoi og IHOL. Vi har desuden illustreret nogle af de indførte begreber ved hjælp af gennemregnede eksempler for at give læseren en bedre intuition om emnet.

Til trods for at al den benyttede litteratur om emnet er på engelsk eller fransk, har vi valgt at skrive på dansk. Som følge heraf, forefindes en ordbog bagerst i rapporten, som altså er vores eget bud på oversættelse af begreberne. Bagerst finder man også et afsnit, som opsummerer den benyttede notation.

Læseren forudsættes at have kendskab til generel kategoriteori samt regulære kategorier og regulær logik, som for eksempel opnået ved læsning af [vO99].

God læselyst!
Bodil Biering og Morten Overgaard Hansen
December 2001.

Indhold

1 Topoi

I dette afsnit definerer vi begrebet topoi der er en bestemt type af kategorier. Vi viser også nogle egenskaber ved topoi, som vi vil få brug for i afsnittet om Soundness af fortolkninger. Som et eksempel studerer vi funktorkategorien $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ og viser at den er en topos. Denne topos er interessant, fordi logikker, der kan fortolkes heri, vil være intuitionistiske, hvis $\mathcal{C}$ er en preordning (ikke $\emptyset$ eller en singelton). Det ser vi et eksempel på til slut i denne rapport.

1.1 Cartesisk afsluttede kategorier

Vi starter med kort at minde om begrebet *cartesisk afsluttet kategori* (eller *ccc*[1]). Definitionen udspringer af et forsøg på at generalisere begrebet *funktionsrum* der er velkendt fra kategorien **Set**: For to mængder X og Y, betegner *eksponenten* Y^X mængden af alle funktioner fra X til Y. Det er essentielt her at lægge mærke til at Y^X er en mængde og derfor igen et objekt i **Set**. Det er også velkendt fra **Set** at der for enhver mængde X findes en naturlig bijektion $\mathbf{Set}(Y \times X, Z) \simeq \mathbf{Set}(Y, Z^X)$ for ethvert par af mængder Y og Z. Det betyder altså at $(-) \times X \dashv (-)^X$. Så funktoren *produkt med* X har en højreadjungeret *opløftning i X'te* for enhver mængde X. Vi er nu klar til at generalisere.

Definition 1.1. *En kategori $\mathcal{C}$ kaldes* cartesisk afsluttet *eller en* ccc, *hvis den har endelige grænser*[2] *og funktoren $(-) \times X$ har en højreadjungeret for ethvert objekt X i $\mathcal{C}$.*

Vi har i Definition 1.1 stiltiende antaget at vi for ethvert par af objekter Y og X i $\mathcal{C}$ har valgt ét bestemt produktobjekt $Y \times X$. Ellers giver det ikke mening at tale om produktfunktor*en*, da produkter kun er defineret op til isomorfi.

Eksempel 1.2. *Som allerede bemærket ovenfor, er kategorien* **Set** *cartesisk afsluttet.*

Større eksempel: $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$

Vi vil i dette eksempel vise, at for enhver lille kategori $\mathcal{C}$ er funktorkategorien $\widehat{\mathcal{C}} = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ cartesisk afsluttet. For at vise at $\widehat{\mathcal{C}}$ har alle endelige grænser, er det nok at vise, at $\widehat{\mathcal{C}}$ har binære produkter, et terminal objekt og egalisatorer ifølge [vO99] Ex. 43 s. 21 og Ex. 48 s. 23.
Alle disse, ja faktisk alle endelige grænser, kan konstrueres punktvis. Vi viser konstruktionen for produkter; det terminale objekt, og egalisatorer konstrueres helt analogt.
Givet to funktorer $F, G : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ønsker vi at definere produktet $F \times G$. Da **Set** har endelige produkter, kan vi for ethvert objekt C i $\mathcal{C}$ danne et produktdiagram:

$$\begin{tikzcd} & P(C) \arrow[dl, "\pi_{F(C)}"'] \arrow[dr, "\pi_{G(C)}"] & \\ F(C) & & G(C) \end{tikzcd}$$

[1] fra engelsk:cartesian closed category

[2] Faktisk kræves normalt kun endelige produkter, men de eksempler vi skal kigge på har alle endelige grænser. Det viser sig desuden at være bekvemt med dette (lidt) strengere krav når vi senere skal definere begrebet topos der netop kræver alle endelige grænser.

P kan udvides til en funktor $\mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathbf{Set}$, for givet $f : D \to C$ i $\mathcal{C}$ vil der findes en entydigt bestemt pil $P(f) : P(C) \to P(D)$ så, diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & P(C) \arrow[dl, "\pi_{F(C)}"'] \arrow[d, "P(f)"] \arrow[dr, "\pi_{G(C)}"] & \\
F(C) \arrow[d, "F(f)"'] & P(D) \arrow[dl, "\pi_{F(D)}"] \arrow[dr, "\pi_{G(D)}"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(D) & & G(D)
\end{tikzcd}$$

kommuterer, da $P(D)$ er et produkt. P repræsenterer altså produktet $F \times G$; $\{\pi_{F(C)} | \forall C \text{ i } \mathcal{C}\}$ og $\{\pi_{G(C)} | \forall C \text{ i } \mathcal{C}\}$ er de naturlige transformationer (jvfr. ovenstående diagram) der er projektionerne på F hhv. G.

Det er fristende at prøve at definere eksponenter punktvis som $G^F(C) = \widehat{\mathcal{C}}(F(C), G(C))$. Problemet her er, at dette ikke på fornuftig måde kan udvides til en funktor. Så vi må prøve noget andet.

Funktoren G^F skal, hvis den findes, opfylde $\widehat{\mathcal{C}}(H \times F, G) \simeq \widehat{\mathcal{C}}(H, G^F)$ for ethvert H i $\widehat{\mathcal{C}}$. Specielt skal dette gælde for enhver repræsentabel funktor $Y(C)$ ([vO99] Example i) s. 4) , hvor Y er Yonedaindlejringen ([vO99] s. 9) defineret ved $Y(C)(C') = \mathcal{C}(C', C)$ for C og C' i $\mathcal{C}$. Anvendes nu Yonedalemmaet [vO99] Prop. 2.2 s. 9, sammen med ovenstående observation fås

$$G^F(C) \simeq \widehat{\mathcal{C}}(Y(C), G^F) \simeq \widehat{\mathcal{C}}(Y(C) \times F, G)$$

Så vi forsøger at definere G^F på objekter ved

$$G^F(C) = \widehat{\mathcal{C}}(Y(C) \times F, G)$$

For $f : C \to C'$ ønsker vi at definere $G^F(f) : G^F(C') \to G^F(C)$. Så for en naturlig transformation $\tau : Y(C') \times F \Rightarrow G$, sættes

$$G^F(f)(\tau) = \tau \circ (Y(f) \times id_F) : Y(C) \times F \Rightarrow Y(C') \times F \Rightarrow G.$$

Der gælder nu for ethvert $\tau \in G^F(C')$

$$G^F(id_{C'})(\tau) = \tau \circ (Y(id_{C'}) \times id_F) = \tau \circ (id_{Y(C')} \times id_F) = \tau.$$

så G^F bevarer identiteter. Lad nu $C'' \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} C'$ i $\mathcal{C}$ være givet; da er for ethvert $\tau \in G^F(C'')$

$$\begin{aligned}
G^F(fg)(\tau) &= \tau \circ (Y(fg) \times id_F) \\
&= \tau \circ (Y(f)Y(g) \times id_F) \\
&= \tau \circ (Y(f) \times id_F) \circ (Y(g) \times id_F) \\
&= G^F(g)(\tau \circ (Y(f) \times id_F)) \\
&= (G^F(g) \circ G^F(f))(\tau)
\end{aligned}$$

så G^F "vender" sammensætning. Altså er $G^F : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathbf{Set}$ en funktor.

Ved $(-)^F : \widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}}$ defineres også en funktor, der på pile er givet ved for $\xi : G \Rightarrow G'$ og $\tau \in G^F(C)$ at sætte

$$\xi^F(\tau) = \xi\tau : Y(C) \times F \Rightarrow G \Rightarrow G'.$$

Dette definerer oplagt en funktor.

Vi vil nu vise, at $(-)^F$ for ethvert F i $\widehat{\mathcal{C}}$ er højreadjungeret til $(-)\times F$. Til dette benytter vi karakteriseringen for adjunktion givet i [vO99] Ex. 88 s. 48. Vi skal altså definere en naturlig transformation $\varepsilon^{G,F} : G^F \times F \Rightarrow G$, så der for enhvert $\xi : H \times F \Rightarrow G$ findes en entydig bestemt $\hat{\xi} : H \Rightarrow G$ så diagrammet

$$\begin{tikzcd} H \times F \arrow[rr, Rightarrow, "\xi"] \arrow[dr, Rightarrow, "\hat{\xi}\times id_F"'] & & G \\ & G^F \times F \arrow[ur, Rightarrow, "\varepsilon^{G,F}"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

kommuterer. Vi definerer den komponentvis så for C i $\mathcal{C}$, $\tau : Y(C) \times F \Rightarrow G$ og $x \in F(C)$, sættes

$$\varepsilon_C^{G,F}(\tau, x) = \tau_C(id_C, x).$$

Vi skal vise at dette virkelig definerer en naturlig transformation, dvs. at diagrammet

$$\begin{tikzcd} G^F(C') \times F(C') \arrow[r, "\varepsilon_{C'}^{G,F}"] \arrow[d, "G^F(f)\times F(f)"'] & G(C') \arrow[d, "G(f)"] \\ G^F(C) \times F(C) \arrow[r, "\varepsilon_C^{G,F}"] & G(C) \end{tikzcd} \tag{2}$$

kommuterer for enhver pil $f : C \to C'$. Bemærk hertil at for $g : D \to C$, $f : C \to C'$ og $h : C' \to E$ gælder

$$Y(f)_C(g) = fg \quad \text{og} \quad Y(C')(f)(h) = hf$$

specielt er

$$Y(f)_C(id_C) = f \quad \text{og} \quad Y(C')(f)(id_{C'}) = f.$$

Altså har vi for $\tau : Y(C') \times F \Rightarrow G$ og $x \in F(C')$

$$\begin{aligned} G(f) \circ \varepsilon_{C'}^{G,F}(\tau, x) &= G(f) \circ \tau_{C'}(id_{C'}, x) \\ &= \tau_C \circ (Y(C')(f) \times F(f))(id_{C'}, x) \\ &= \tau_C(f, F(f)(x)) \end{aligned} \tag{3}$$

hvor (3) følger af at τ er en naturlig transformation.
Samtidig haves

$$\begin{aligned} \varepsilon_C^{G,F}(G^F(f)(\tau) \times F(f)(x)) &= \tau_C \circ (Y(f)_C, id_F)(id_c, F(f)(x)) \\ &= \tau_C(f, F(f)(x)). \end{aligned}$$

Så vi har vist at (2) kommuterer.
Lad nu $\xi : H \times F \Rightarrow G$ være givet. For C i $\mathcal{C}$ og $u \in H(C)$ skal vi definere $\hat{\xi}_C(u) \in G^F(C)$ dvs. en naturlig transformation

$$\hat{\xi}_C(u) : Y(C) \times F \Rightarrow G.$$

Det gør vi punktvis ved for D i $\mathcal{C}$, $f : D \to C$ og $x \in F(D)$ at sætte

$$(\hat{\xi}_C(u))_D(f, x) = \xi_D(H(f)(u), x)$$

$\hat{\xi}_C$ er oplagt en naturlig transformation, da ξ er det.
Vi har nu

$$\begin{aligned}\varepsilon_C^{G,F} \circ (\hat{\xi}_C(u), x) &= (\hat{\xi}_C(u))_C(id_C, x) \\ &= \xi_C(H(id_C)(u), x) \\ &= \xi_C(u, x)\end{aligned}$$

hvilket viser at (1) kommuterer som ønsket. Det følger nu af naturlighed, at $\hat{\xi}$ er entydig bestemt med hensyn til denne egenskab. Så ifølge [vO99] Ex. 88 s. 48 er $(-) \times F \dashv (-)^F$ for ethvert F i $\mathcal{C}$, og $\varepsilon^{-,F}$ er koenheden for denne adjunktion. Vi har altså vist at $\widehat{\mathcal{C}}$ er cartesisk afsluttet.

1.2 Delobjektsdeterminanter

For en mængde X og en delmængde $A \subseteq X$, findes der en entydig bestemt funktion $\chi_A : X \to \{0,1\}$ givet ved

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

kaldet *den karakteristiske funktion for A*. Vi ønsker at generalisere dette fænomen til generelle kategorier og delobjekter.

For en kategori $\mathcal{C}$ og et objekt X heri har vi i [vO99] s. 31 set mængden af delobjekter $\mathrm{Sub}(X)$ af X indført som ækvivalensklasser af monomorfier $m : Y \rightarrowtail X$. Her er to monomorfier $m : Y \rightarrowtail X$ og $m' : Y' \rightarrowtail X$ ækvivalente hvis der findes en isomorfi $f : Y \to Y'$ så $m'f = m$; m siges at være mindre end m' og vi skriver $m \leq m'$, hvis f opfylder $m'f = m$ men ikke nødvendigvis er iso. Dette definerer en partiel ordning på $\mathrm{Sub}(X)$.

Bemærkning 1.3. *Normalt vil vi ikke skelne mellem en monomorfi repræsenterende et delobjekt og den ækvivalensklasse den tilhører. Vi vil således tit sige "lad m være et delobjekt af X", og dermed mene: "lad m være en vilkårlig repræsentant for det delobjekt af X som indeholder m". Denne "misbrug" af sproget retfærdiggøres ved, at det næsten altid er ligegyldigt hvilken repræsentant vi vælger, da næsten alle konstruktioner kun er defineret op til isomorfi (og så er den korrekte sprogbrug også noget tung at arbejde med). Det er iøvrigt almindelig praksis at gøre sådan; både her, såvel som i andre grene af matematiken[3]. De steder hvor valget af repræsentant har betydning, vil vi naturligvis gøre opmærksom herpå.*

Analogien med **Set** er, at vi lader enhver injektiv afbildning m repræsenterer en delmængde af sit kodomæne, nemlig sit billede, og siger at m og m' er ækvivalente, hvis de har samme billede. Den partielle ordning bliver så mængdeteoretisk inklusion af billederne. Bemærk at vi i **Set** for enhver delmængde $A \subseteq X$ har en kanonisk injektiv afbildning til at repræsentere denne, nemlig inklusionen $\iota : A \hookrightarrow X$; dette gælder ikke i en generel kategori.
Vi ønsker nu til ethvert delobjekt i $\mathrm{Sub}(X)$ at knytte en analog til en karakteristisk funktion. Dette gøres med det såkaldte Ω-*aksiom*.

Definition 1.4. *En kategori $\mathcal{C}$ med et terminalt objekt 1, siges at have en* delobjektsdeterminant, *hvis der findes et objekt Ω i $\mathcal{C}$ og en pil $\top : 1 \to \Omega$ således at følgende aksiom er opfyldt:*

[3] Tænk blot på fx. rummet L_2 af kvadratisk integrable funktioner. Det tænker man jo til dagligt ikke på som ækvivalensklasser af funktioner der stemmer overens på nær evt. i en nul-mængde!

Ω-aksiomet: *For enhver mono $m : Y \rightarrowtail X$, findes der netop én pil $\chi_m : X \to \Omega$ i $\mathcal{C}$ sådan at diagrammet*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "I_Y"'] & X \arrow[d, "\chi_m"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} \tag{4}$$

er et fibreret produktdiagram.
Pilen χ_m kaldes den karateristiske pil for m *eller blot* karakteren for m.

Eksempel 1.5. *I* **Set** *kan vi vælge $\Omega = \{0, 1\}$, $1 = \{*\}$ og definere $\top : 1 \to \Omega$ ved $\top(*) = 1$. Vi har da at $Y \simeq \{(y, x) \in 1 \times X | \top(y) = \chi_m(x)\}$. Eneste mulighed for $I_Y : Y \to 1$ bliver da den afbildning der sender alt i punktet $*$; så at diagrammet (4) kommuterer betyder at $\chi_m(x) = 1$ for ethvert $x \in m(Y)$ og 0 ellers. χ_m er altså den velkendte karateristiske funktion for $m(Y) \subseteq X$.*

Større eksempel: $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$

I det følgende antages $\mathcal{C}$ at være en fast lille kategori[4]. Vi vil i dette eksempel konstruere en delobjektsdeterminant for $\widehat{\mathcal{C}} = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ og vise at den opfylder Ω-aksiomet. Vi definerer først begrebet *delfunktor*, der viser sig at være bekvemt at arbejde med.

Definition 1.6. *Funktoren $G : \mathcal{C}^{op} \to$ **Set** siges at være en* delfunktor *af funktoren $F : \mathcal{C}^{op} \to$ **Set** såfremt*

(i) $G(C) \subseteq F(C)$ *for ethvert C i $\mathcal{C}$.*

(ii) $G(f) : G(C) \to G(C')$ *er restriktionen af $F(f)$ til $G(C)$ for enhver pil $f : C' \to C$ i $\mathcal{C}$.*

Delfunktorer og delobjekter i $\widehat{\mathcal{C}}$ står i bijektiv korrespondence, thi hvis G er en delfunktor af F, fås på kanonisk vis et element i $\mathrm{Sub}(F)$ ved som komponenter at vælge indlejringerne $\iota : G(C) \hookrightarrow F(C)$ der jo alle er monoer[5]. Hvis omvendt $\xi : G \Rightarrow F$ er et element i $\mathrm{Sub}(F)$, da er alle ξ's komponenter monoer. Så ved at sætte $G'(C) = \xi_C(G(C)) \subseteq F(C)$ for ethvert C i $\mathcal{C}$ og $G'(f) = F(f)|_{G'(C)}$ for enhver pil $f : C' \to C$ i $\mathcal{C}$ fås en delfunktor hvis kanoniske element i $\mathrm{Sub}(F)$ er ækvivalent med $\xi : G \Rightarrow F$ (de har komponentvis samme billeder). Vi kalder denne for den kanoniske delfunktor. Bemærk at selvom de to begreber er konceptuelt forskellige[6] vil vi af og til betragte delobjekter som funktorer og omvendt jvf. ovenstående.

Vi vil nu forsøge at definere funktoren $\Omega : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$. Ifølge Sætning 1.10 (der vises nedenfor) har vi (da $\widehat{\mathcal{C}}$ er ccc) en naturlig isomorfi

$$\mathrm{Sub}(F) \simeq \widehat{\mathcal{C}}(F, \Omega)$$

for ethvert F i $\widehat{\mathcal{C}}$. Dette må specielt gælde for enhver repræsentabel funktor $Y(C)$, så kombineret med Yonedalemmaet ([vO99] Prop. 2.2 s. 9) fås at Ω skal opfylde

$$\mathrm{Sub}(Y(C)) \simeq \widehat{\mathcal{C}}(Y(C), \Omega) \simeq \Omega(C)$$

[4]Dvs. at både klassen af objekter og klassen af pile er mængder.
[5]Husk at alle basale kontruktioner (og således også monoer) er komponentvise i $\widehat{\mathcal{C}}$.
[6]En delfunktor er en funktor, mens et delobjekt af en funktor er en naturlig transformation.

for ethvet C i $\mathcal{C}$. Så vores første forsøg er at definere Ω ved

$$\Omega(C) = \mathrm{Sub}(Y(C)) \tag{5}$$

for ethvert C i $\mathcal{C}$. Denne definition viser sig dog at være lidt "tung" at arbejde med, så vi vælger en ækvivalent hermed der går via begrebet *idealer.*

Definition 1.7. *For ethvert C i $\mathcal{C}$ sættes*

$$\mathcal{S}_C = \{f \text{ i } \mathcal{C} | \mathrm{kod}(f) = C\}^7.$$

En delmængde $\mathcal{I}_C \subseteq \mathcal{S}_C$ kaldes et ideal *på C såfremt der gælder*

$$f \in \mathcal{I}_C, h \text{ i } \mathcal{C}, \mathrm{dom}(f) = \mathrm{kod}(h) \Rightarrow fh \in \mathcal{I}_C.$$

$\mathcal{S}_C$ selv er oplagt et ideal på C; endda det maksimale blandt idealer på C mht. inklusion. Et andet oplagt ideal på C er $\emptyset$. En egenskab ved idealer vi tit vil bruge er

$$id_C \in \mathcal{I}_C \Leftrightarrow \mathcal{I}_C = \mathcal{S}_C.$$

Dette eftervises nemt og overlades som øvelse til den ivrige læser.

Lemma 1.8. *En bijektiv korrespondence mellem delfunktorer af $Y(C)$ og idealer på C er givet ved*

i) Givet en delfunktor G af $Y(C)$, da defineres ved

$$\mathcal{I}_C = \{f \in \mathcal{S}_C | f \in G(\mathrm{dom}(f))\}$$

et ideal på C.

ii) Givet et ideal $\mathcal{I}_C$ på C, defineres en delfunktor G af den repræsentable funktor $Y(C)$ ved at sætte

$$G(C') = \{f \in \mathcal{I}_C | \mathrm{dom}(f) = C'\} \subseteq Y(C)(C')$$

og $G(f) = Y(C)(f)|_{G(D)}$ for $f : C' \to D$.

Bevis: At korrespondancen er bijektiv indses let ved indsætte den ene konstruktion i den anden og vice versa, så det overlades til den ivrige læser som en let øvelse i mængdejonglering.
ad i): Lad $f : C' \to C$ være en pil i $\mathcal{I}_C$ og $h : D \to C'$ en pil i $\mathcal{C}$.
Det skal vises at $fh \in G(D)$. Da $G(h)$ blot er restriktionen af $Y(C)(h)$ til $G(C')$, virker den på pile ved sammensætning. Så da billedet af $G(h)$ er indeholdt i $G(D)$ og $f \in G(C')$, må $fh = G(h)(f) \in G(D)$ som ønsket.
ad ii): Lad $f : C' \to D$ være en pil i $\mathcal{C}$ og $h : D \to C$ være en pil i $G(D)$.
Det skal vises at $G(f)(h) \in G(C')$. Men da $G(f)$ blot er restriktionen af $Y(C)(f)$ er $G(f)(h) = hf$. Vi har at $\mathrm{dom}(hf) = C'$ og da $\mathcal{I}_C$ er et ideal vil $hf \in \mathcal{I}_C$. Funktoregenskaberne for identitet og sammensætning følger nu af, at G er restriktionen af funktoren $Y(C)$ der på pile er givet ved sammensætning. □

[7] Bemærk at denne definition ikke giver anledning til mængdeteoretiske problemer da $\mathcal{C}$ er antaget at være lille.

Jævnfør ovenstående lemma, kan vi altså i stedet for (5) definere Ω ved

$$\Omega(C) = \{\mathcal{I}_C | \mathcal{I}_C \text{ er et ideal på } C\}$$

og for $f : C' \to C$ ved

$$\Omega(f)(\mathcal{I}_C) = \mathcal{I}_C \cdot f = \{h \in \mathcal{I}_{C'} | fh \in \mathcal{I}_C\},$$

der klart opfylder funktoregenskaberne.
Vi skal nu definere den naturlige transformation $\top : 1 \Rightarrow \Omega$. Vi lader den være givet ved de maksimale idealer i $\mathcal{C}$:

$$\top_C(*) = \mathcal{S}_C$$

hvor $*$ er elementet i $1(C)$[8].
For $f : C' \to C$ har vi at

$$\Omega(f)\top_C(*) = \mathcal{S}_C \cdot f = \{h \in \mathcal{S}_{C'} | fh \in \mathcal{S}_C\} = \mathcal{S}_{C'} = \top_{C'} 1(f)(*)$$

så $\top : 1 \Rightarrow \Omega$ er naturlig.

Vi efterviser nu at $\top : 1 \Rightarrow \Omega$ opfylder Ω-aksiomet. Så lad $G \Rightarrow F$ være et element i $\mathrm{Sub}(F)$ og antag at G er den kanoniske delfunktor af F. Vi ønsker at definere en entydig bestemt naturlig transformation

$$\chi_G : F \Rightarrow \Omega$$

så diagrammet

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\iota"] \arrow[d, Rightarrow] & F \arrow[d, Rightarrow, "\chi_G"] \\ 1 \arrow[r, Rightarrow, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} \tag{6}$$

er et fibreret produktdiagram. For enhver pil $f : C' \to C$ i $\mathcal{C}$ haves en pil $F(f) : F(C) \to F(C')$, der for et givet $x \in F(C)$ enten sender dette ind i $G(C')$ eller i $F(C') \backslash G(C')$. Så vi definerer for et givet $x \in F(C)$ den C'te komponent af χ_G ved

$$\chi_{G,C}(x) = \{f \in \mathcal{S}_C | F(f)(x) \in G(\mathrm{dom}(f))\}.$$

$\chi_{G,C}(x)$ er et ideal på C, thi for $f : C' \to C$ med $F(f)(x) \in G(C')$ og en pil $h : D \to C'$ i $\mathcal{C}$ har vi at

$$F(fh)(x) = F(h)F(f)(x) = G(h)F(f)(x) \in G(D)$$

dvs. at $fh \in \chi_{G,C}(x)$.
Vi skal godtgøre, at χ_G er naturlig, dvs. at diagrammet

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\chi_{G,C}"] \arrow[d, "F(f)"'] & \Omega(C) \arrow[d, "\Omega(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\chi_{G,C'}"] & \Omega(C') \end{tikzcd}$$

[8] Husk at 1(C) = 1 = { * }for ethvert objekt $\mathcal{C}$

kommuterer for enhver pil $f : C' \to C$. Den ene vej rundt fås

$$\Omega(f)\chi_{G,C}(x) = \Omega(f)(\{g \in \mathcal{S}_C | F(g)(x) \in G(C')\}) = \{h \in \mathcal{S}_{C'} | F(fh)(x) \in G(C')\},$$

mens den anden vej rundt giver

$$\chi_{G,C'} F(f)(x) = \{h \in \mathcal{S}_{C'} | F(h)F(f)(x) \in G(C')\} = \{h \in \mathcal{S}_{C'} | F(fh)(x) \in G(C')\}.$$

Vi påstår nu at der for ethvert C i $\mathcal{C}$ gælder

$$\chi_{G,C}(x) = (\top_C \circ 1)(x) = \mathcal{S}_C \Leftrightarrow x \in G(C). \tag{7}$$

For antag at $\chi_{G,C}(x) = \mathcal{S}_C$. Da vil specielt $id_C \in \chi_{G,C}(x)$, og vi får så at $x = F(id_C)(x) \in G(C)$. Hvis omvendt $x \in G(C)$ vil $F(id_C)(x) = G(id_C)(x) = x \in G(C)$. Altså har vi $id_C \in \chi_{G,C}(x)$ hvilket medfører $\chi_{G,C}(x) = \mathcal{S}_C$.
Men påstanden (7) er ækvivalent med at påstå at $G(C)$ er det fibrerede produkt af diagrammet

$$\begin{tikzcd} & F(C) \arrow[d, "\chi_{G,C}"] \\ 1(C) \arrow[r, "\top_C"] & \Omega(C) \end{tikzcd}$$

for ethvert C i $\mathcal{C}$, da det fibrerede produkt i **Set** vil være isomorft med en mængde af formen

$$\{(y,x) \in 1(C) \times F(C) | (\top_C \circ 1)(y) = \chi_{G,C}(x)\} \quad (\simeq \{x \in F(C) | \chi_{G,C}(x) = \mathcal{S}_C\}).$$

Vi mangler nu blot at eftervise, at χ_G er den entydigt bestemte naturlige transformation med denne egenskab. Så antag at $\tau : F \Rightarrow \Omega$ også opfylder egenskaben. Da viser ovenstående jfr. (7) at for $x \in F(C)$ og $f : C' \to C$, har vi

$$F(f)(x) \in G(C') \Leftrightarrow \tau_{C'}(F(f)(x)) = \mathcal{S}_{C'}$$

Vi regner videre på højresiden af dette udsagn og får, ved at udnyttet at τ er naturlig og definitionen af Ω, at

$$\mathcal{S}_{C'} = \tau_{C'}(F(f)(x)) = \Omega(f)\tau_C(x) = \tau_C(x) \cdot f$$

Men denne ligning er ækvivalent med at $f \in \tau_C(x)$ thi hvis $f \in \tau_C(x)$ vil $id_{C'} \in \tau_C(x) \cdot f$, hvilket medfører at $\tau_C(x) \cdot f = \mathcal{S}_{C'}$. Hvis omvendt $\mathcal{S}_C = \tau_C(x) \cdot f$, vil $id_{C'} \in \tau_C(x) \cdot f$, hvilket medfører at $f = f id_{C'} \in \tau_C(x)$. Alt i alt fås

$$F(f)(x) \in G(C') \Leftrightarrow f \in \tau_C(C).$$

Men det er jo netop sådan vi har defineret χ_G, så $\tau = \chi_G$ som ønsket.

Vi startede med at antage, at G var den kanoniske delfunktor af F. Hvis G ikke var den kanoniske delfunktor, ville den være isomorf med denne. Så da fibrerede produkter kun er defineret op til isomorfi, tabes intet ved denne antagelse!

1.3 Egenskaber ved delobjektsdeterminanter

Sætning 1.9. *Delobjektsdeterminanter er entydigt bestemte op til isomorfi.*

Bevis: Antag at både $\top : 1 \to \Omega$ og $\top' : 1 \to \Omega'$ opfylder Ω-aksiomet og betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d, "I_1"'] & \Omega \arrow[d, "\chi'_\top"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top'"] \arrow[d, "I_1"'] & \Omega' \arrow[d, "\chi_{\top'}"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Bemærk her at enhver pil der har 1 som domæne er mono (thi der findes jo kun en pil $A \to 1$ for ethvert objekt A i $\mathcal{C}$), specielt er både $\top$ og $\top'$ monoer.
Da både det øverste og nederste kvadrat er fibrerede produktdiagrammer, følger det af PBL[9] at den yderste firkant er et fibreret produktdiagram. Men så gælder altså ifølge Ω-aksiomet at $\chi_{\top'} \circ \chi'_\top$ er den entydige pil så

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d, "I_1"'] & \Omega \arrow[d, "\chi_{\top'} \circ \chi'_\top"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

er et fibreret produktdiagram. Vi har at identitetspilen $id_\Omega : \Omega \to \Omega$ også gør dette til et fibreret produktdiagram, da $I_1 : 1 \to 1$ er identiteten på 1, så vi må have $\chi_{\top'} \circ \chi'_\top = id_\Omega$. Ved at ombytte $\top$ og $\top'$ fås analogt at $\chi'_\top \circ \chi_{\top'} = id_{\Omega'}$, så $\Omega \simeq \Omega'$ som ønsket. □

Jævnfør ovenstående sætning giver det altså mening at tale om delobjektsdeterminant*en*, såfremt den findes.

Der er en tæt sammenhæng mellem pile $X \to \Omega$ og elementer i $\mathrm{Sub}(X)$, hvilket følgende Sætning viser.

Sætning 1.10. *Lad $\mathcal{C}$ være en kategori med terminalobjekt 1, fibrerede produkter og delobjektsdeterminant. Da gælder*

$$\mathrm{Sub}(X) \simeq \mathcal{C}(X, \Omega)$$

i **Set** *for ethvert objekt X i $\mathcal{C}$ og denne isomorfi er naturlig i X.*

Bevis: Vi viser at tildelingen givet ved Ω-aksiomet er en isomorfi i **Set**. Så lad Φ_X betegne tildelingen $m \mapsto \chi_m$. Det skal nu vises at:

i) Φ_X er veldefineret, dvs. er uafhængig af valg af repræsentant.

ii) Φ_X er injektiv.

iii) Φ_X er surjektiv.

[9] Dette står for PullBack-Lemmaet der fx. kan findes som Ex. 36 s. 20 i [vO99]

ad i): Antag at $m : Y \rightarrowtail X$ og $m' : Y' \rightarrowtail X$ repræsenterer samme element i $\mathrm{Sub}(X)$. Vi ønsker at vise $\chi_m = \chi_{m'}$. Der findes en iso $f : Y \to Y'$ så $m'f = m$. Betragt nu diagrammet

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, tail, bend left, "m"] \arrow[ddr, bend right, "I_Y"'] & & \\
& Y' \arrow[r, tail, "m'"'] \arrow[d, "I_{Y'}"] & X \arrow[d, "\chi_{m'}"'] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} \tag{8}$$

Hvis vi kan vise at randen er et fibreret produktdiagram, må $\chi_m = \chi_{m'}$ da karakterer er entydigt bestemte ifølge Ω-aksiomet. Det er klart at randen i (8) kommuterer da $m = m'f$. Så antag at der findes et objekt Z i $\mathcal{C}$ og $g : Z \to X$, så randen i diagrammet

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "I_Z"'] & & \\
& Y \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, "I_Y"] & X \arrow[d, "\chi_{m'}"'] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Da det indre kvadrat i (8) er et fibreret produktdiagram findes en entydig pil $\lambda' : Z \to Y'$ så $m'\lambda' = g$. Men $m' = mf^{-1}$, så ved at vælge $\lambda = f^{-1}\lambda'$ fås $g = m\lambda$. λ er entydig bestemt, thi hvis μ også opfylder $g = m\mu$, er $\mu = \lambda$ da m er mono.
$\Phi_X : \mathrm{Sub}(X) \to \mathcal{C}(X, \Omega)$ er altså en veldefineret afbildning i **Set**.
ad ii): Lad $\chi : X \to \Omega$ være givet og antag for $m : Y \rightarrowtail X$ og $m' : Y' \rightarrowtail X$ at $\Phi_X(m) = \chi = \Phi_X(m')$. Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[dr, dotted, "\lambda"] \arrow[drr, tail, bend left, "m'"] \arrow[ddr, bend right, "I_Y"'] & & \\
& Y \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, "I_Y"] & X \arrow[d, "\chi"'] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} \tag{9}$$

Da det inderste kvadrat er et fibreret produktdiagram, findes der en entydig pil $\lambda : Y' \to Y$ så $m' = m\lambda$. Altså er $m' \leq m$. Ved at ombytte m og m' ses at også $m \leq m'$, så da "$\leq$" er en partiel ordning på $\mathrm{Sub}(X)$, må m og m' repræsentere samme element i $\mathrm{Sub}(X)$.
Altså er Φ_X injektiv.
ad iii): Lad $\chi : X \to \Omega$ være givet og dan det fibrerede produktdiagram

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, "I_X"'] & X \arrow[d, "\chi"] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Da $\top : 1 \rightarrowtail \Omega$ er mono, og monoer er stabile under fibrerede produkter [vO99] Ex. 35 s. 20, er også m mono. Så m repræsenterer et delobjekt af X, med $\Phi_X(m) = \chi$.

Altså er Φ_X surjektiv.
At denne isomorfi er naturlig, skal forstås sådan, at Sub udvides til en (kontravariant) funktor, og at Φ så er en naturlig transformation fra Sub til $\mathcal{C}(-,\Omega)$. Så givet en pil $f : X \to Y$, sættes $\mathrm{Sub}(f) = f^* : \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$, (defineret i [vO99] s.32). Da $\mathcal{C}(-,\Omega)$ virker med prekomponering på pile, skal vi, for at godtgøre naturlighed af Φ, vise at diagrammet

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(Y) \arrow[r, "\Phi_Y"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathcal{C}(Y,\Omega) \arrow[d, "-\circ f"] \\ \mathrm{Sub}(X) \arrow[r, "\Phi_X"'] & \mathcal{C}(X,\Omega) \end{tikzcd}$$

kommuterer. For $m : M \rightarrowtail Y$ i $\mathrm{Sub}(Y)$ betragter vi diagrammet

$$\begin{tikzcd} f^*(M) \arrow[r, "f^*(m)"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\Phi_Y(m)=\chi_m"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Da både øverste og nederste kvadrat er fibrerede produktdiagrammer giver PBL at randen også er det. Det følger nu af Ω-aksiomet, at

$$\Phi_X(f^*(m)) = \chi_{f^*(m)} = \Phi_Y(m) \circ f$$

som var hvad der skulle vises. □
Ovenstående Sætning giver anledning til følgende

Definition 1.11. *For enhver pil $\chi : X \to \Omega$ betegner vi med* $\ker(\chi)$ *det entydigt bestemte delobjekt i* $\mathrm{Sub}(X)$ *svarende til χ. Dette kaldes for* kernen for χ *jvf. [Sco86].*

Bemærkning 1.12. *Som nævnt i Bemærkning 1.3 vil vi også her tit lade* $\ker(\chi)$ *betegne en mono i den tilhørende ækvivalensklasse i* $\mathrm{Sub}(X)$. *Vi vil også lade* $\ker(\chi)$ *betegne domænet for det tilhørende delobjekt.*

Følgende karakterisering af kernen vil vise sig at blive nyttig senere.

Lemma 1.13. *En pil i $\mathcal{C}$ er kerne for $\chi : X \to \Omega$ hvis og kun hvis den er egalisator for χ og $\top I_X : X \to 1 \to \Omega$.*

Bevis: Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd} \ker(\chi) \arrow[r, "\ker(\chi)"] \arrow[d, "I_{\ker(\chi)}"'] & X \arrow[d, "\chi"] \arrow[dl, "I_X"'] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} \tag{10}$$

Her gælder pga. den universelle egenskab for 1 altid $I_X \ker(\chi) = I_{\ker(\chi)}$, så randen af diagrammet (10) kommuterer hvis og kun hvis diagrammet

$$\begin{tikzcd}
& & 1 \arrow[dr, "\top"] & \\
\ker(\chi) \arrow[r, "\ker(\chi)"] & X \arrow[ur, "I_X"] \arrow[rr, "\chi"] & & \Omega
\end{tikzcd} \tag{11}$$

kommuterer. Betragt nu diagrammet

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "I_Z"'] & & \\
& \ker(\chi) \arrow[r, "\ker(\chi)"] \arrow[d, "I_{\ker(\chi)}"'] & X \arrow[dl, "I_X"'] \arrow[d, "\chi"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Her gælder altid $I_Z = I_X f$. Så randen kommuterer dvs. $\chi f = \top I_Z$ hvis og kun hvis $\chi f = \top I_X f$, altså hvis diagrammet

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, dotted, "\lambda"'] \arrow[dr, bend left, "f"] & & 1 \arrow[dr, "\top"] & \\
\ker(\chi) \arrow[r, "\ker(\chi)"] & X \arrow[ur, "I_X"] \arrow[rr, "\chi"] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Der findes altså samtidig en entydig pil $\lambda : Z \to \ker(\chi)$, så $f = \ker(\chi)\lambda$.
Så (10) er et fibreret produktdiagram hvis og kun hvis (11) er et egalisatordiagram. □

1.4 Definition af topos

Vi er nu klar til at definere begrebet *topos*.

Definition 1.14. *En kategori $\mathcal{E}$ kaldes en* topos[10] *såfremt den er cartesisk afsluttet og har en delobjeksdeterminant.*

Eksempel 1.15. Set *er en topos.*

Eksempel 1.16. *Da* $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ *både er cartesisk afsluttet og har en delobjektsdeterminant, er* $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ *en topos.*

Det kan vises at en topos også har endelige kogrænser, specielt koprodukter. Det kan også vises at i en topos er regulære epimorfier stabile under fibrerede produkter. Specielt fås at enhver topos er en regulær kategori jfr. [vO99] Def. 4.1 s. 28. Vi vil ikke komme ind på beviserne her, da de er lange og meget tekniske, og desuden ligger for langt fra kernestoffet i dette projekt. Vi vil senere få brug for to andre egenskaber om topoi, nemlig

[10] Faktisk er dette hvad der normalt kaldes en *elementær topos*. Men da vi kun betragter topoi af denne type, vil vi ikke slæbe rundt på dette adjektiv!

Lemma 1.17. *Epier er stabile under fibrerede produktdiagrammer, dvs. hvis*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

er et fibreret produktdiagram og f er epi, så er g det også. □

Lemma 1.18. *Koprodukter bevarer fibrerede produkter, dvs. hvis*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C' \arrow[r, "h'"] & D \end{tikzcd}$$

begge er fibrerede produktdiagrammer, da er også

$$\begin{tikzcd} A + A' \arrow[r, "{[f,f']}"] \arrow[d, "g+g'"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C + C' \arrow[r, "{[h,h']}"] & D \end{tikzcd}$$

et fibreret produktdiagram. □

Begge egenskaber er konsekvenser af *Toposteoriens Fundamentalsætning* der bla. siger at for enhver topos $\mathcal{E}$ og et objekt C i $\mathcal{E}$ er slice-kategorien ([vO99] Example j) s. 4) $\mathcal{E}/C$ igen en topos. Vi vil hverken vise Toposteoriens Fundamentalsætning eller de to egenskaber.
Vi viser til gengæld to lemmaer, der følger af Lemma 1.17 som vi også får brug for senere.

Lemma 1.19. *Hvis*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

er et fibreret produktdiagram, findes en pil $h : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(g)$ så

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}(f) \arrow[r, "\mathrm{Im}(f)"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "v"] \\ \mathrm{Im}(g) \arrow[r, "\mathrm{Im}(g)"] & D \end{tikzcd}$$

er et fibreret produktdiagram.

Bevis: Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted, "j'"'] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "u"'] & E \arrow[r, "v^*(\mathrm{Im}(g))"'] \arrow[d, "h'"] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, two heads, "i"] & \mathrm{Im}(g) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}(g)"] & D \end{tikzcd}$$

hvor højre kvadrat er et fibreret produkt. $v^*(\mathrm{Im}(g))$ er mono, da monoer er stabile under fibrerede produkter ifølge [vO99] Ex. 35 s. 20. Da randen af diagrammet pr. antagelse kommuterer, findes entydig pil $j' : A \to E$ så $f = v^*(\mathrm{Im}(g))j'$. Venstre kvadrat er ifølge PBL også et fibreret produkt, så da epier ifølge Lemma 1.17 er stabile under fibrerede produkter, er j' epi. $v^*(\mathrm{Im}(g))j'$ er altså en epi-mono faktorisering af f, så ifølge [vO99] Prop. 4.2 s. 29 findes isomorfi $\rho : E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$ så diagrammet

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "v^*(\mathrm{Im}(g))"] & \\ A \arrow[ur, two heads, "j'"] \arrow[dr, two heads, "j"'] & & B \\ & \mathrm{Im}(f) \arrow[uu, "\rho"] \arrow[ur, "\mathrm{Im}(f)"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterer. Den ønskede pil er altså givet ved $h = h'\rho$. □

Lemma 1.20. *Hvis $X \times Y$ er et produkt i en topos $\mathcal{E}$, da er projektionerne $\pi_X : X \times Y \to X$ og $\pi_Y : X \times Y \to Y$ epier.*

Bevis: På grund af den universelle egenskab for det terminale objekt 1, er enhver pil $1 \to Z$ mono for ethvert objekt Z i $\mathcal{E}$. Af dualitetsprincippet følger nu at den entydige pil $Z \to 1$ er epi for ethvert objekt Z i $\mathcal{E}$. Det indses nemt at produktet af X og Y kan fås som det fibrerede produkt af $X \to 1$ og $Y \to 1$, dvs. at

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

er et fibreret produktdiagram. Så da epier ifølge Lemma 1.17 er stabile under fibrerede produktdiagrammer, er både π_X og π_Y epier. □

I enhver topos defineres en pil $\perp : 1 \to \Omega$, der er en slags modsat til pilen $\top$ (fx. i **Set** er $\perp$ den pil der vælger 0 i $\{0,1\}$ hvis $\top$ vælger 1; altså er $\perp$ pilen *falsk*).

Definition 1.21. *I enhver topos $\mathcal{E}$ er pilen $\perp : 1 \to \Omega$ defineret som karakteren af den entydigt bestemte pil $0 \to 1$*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Bemærkning 1.22. *I ovenstående definition ligger der implicit en påstand om at den entydigt bestemte pil $0 \to 1$ er mono (ellers giver det ikke mening at tage karakteren af den). Dette er på ingen måde en triviel påstand og er en konsekvens af, at $\mathcal{E}$ er cartesisk afsluttet. Et bevis for påstanden kan findes i [Gol79] Thm. 1 s. 72.*

2 Intuitionistisk højere ordens logik

Intuitionistisk logik adskiller sig fra klassisk logik ved ikke at indeholde aksiomet om det udelukkede tredje, dvs. udsagnet $p \vee \neg p$ gælder ikke generelt i intuitionistisk logik. Som følge heraf vil visse andre af de logiske aksiomer, som vi er vandt til at benytte os af heller ikke gælde i den intuitionistiske logik. Et eksempel herpå er *reductio ad absurdum* altså reglen $\neg\neg p \leftrightarrow p$.

Et sprog for højereordens intuitionistisk logik med typer indeholder følgende:

- De logiske symboler $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists, =$.
- En mængde af basistyper, heriblandt 1 (der findes netop et element af typen 1, dette betegnes $*$) og Ω (sandhedsværdier).
- For hver type A, en numerabel mængde af variable $x_1^A, x_2^A, x_2^A, \ldots$ af typen A. (Vi skriver også $x : A$ for at angive, at en variabel x har typen A.)
- Alle typer, som kan dannes ud fra følgende regler: Hvis A og B er typer, er
  - $A \times B$ en type
  - PA en type.
- En mængde af funktionssymboler $f : A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$, hvor tilfældet $n = 0$ svarer til at funktionssymbolet er et symbol for en konstant af typen B.
- En mængde af relationssymboler $R \subseteq A_1, \ldots, A_m$

Definition 2.1. *Termer er defineret ved:*

t1 $*$ *er en term af type* 1.

t2 x^A *er en term af type* A*, hvis* x^A *er en variabel f type* A.

t3 *Hvis* a *er en term af type* A *og* b *en term af type* B*, så er* (a, b) *en term af type* $A \times B$.

t4 *Hvis* $a_1, \ldots, a_n$ *er termer af typerne* $A_1, \ldots, A_n$ *respektivt, og* $f : A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$ *er et funktionssymbol, så er* $f(a_1, \ldots, a_n)$ *en term af type* B.

t5 *Hvis* $R \subseteq A_1, \ldots, A_m$ *er et relationssymbol og* $a_1, \ldots, a_m$ *termer af typerne* $A_1, \ldots, A_m$ *respektivt, så er* $R(a_1, \ldots, a_m)$ *en term af type* Ω.

t6 *Hvis* a *og* b *er termer af samme type, så er* $a = b$ *en term af type* Ω.

t7 *Hvis* a *er en term af type* A *og* α *en term af type* PA*, så er* $a \in \alpha$ *en term af type* Ω.

t8 *Hvis* φ *er en term af type* Ω *(med mulige frie forekomster af variablen* $x : A$*), så er* $\{x \in A | \varphi\}$ *en term af type* PA *uden frie forekomster af* x.

t9 $\top$ *og* $\bot$ *er termer af typen* Ω.

t10 *Hvis* φ *og* ψ *er termer af type* Ω*, så er også* $\varphi \wedge \psi$*,* $\varphi \vee \psi$*,* $\varphi \rightarrow \psi$*,* $\neg\varphi$ *termer af type* Ω.

t11 *Hvis φ er en term af type Ω (med mulige frie forekomster af variablen $x : A$), så er $\forall_{x:A}\varphi$ og $\exists_{x:A}\varphi$ termer af type Ω, hvor x er bundet.*

Termer af type Ω kaldes formler.

For enhver endelig mængde X af variable haves en binær relation $\vdash_X$ af inferens mellem termer af type Ω, hvis frie variable alle er elementer i X. Ved $\vdash_X \varphi$ forstås $\top \vdash_X \varphi$ og hvis $X = \emptyset$ skrives blot $\vdash$.

Et udtryk af formen $\psi \vdash_X \varphi$ kaldes en *sekvent.*

Definition 2.2. *For et givet sprog kaldes en mængde T af sekventer for en teori, hvis og kun hvis følgende betingelser holder. (Notation: Når vi skriver $\frac{P}{Q}$, hvor P og Q er sekventer, betyder det $(P \in T) \Rightarrow (Q \in T)$, og $\frac{P}{\overline{Q}}$ betyder $(P \in T) \Leftrightarrow (Q \in T)$.)*

Axiomer

ax1

$$\frac{}{\vdash \top}$$

ax2

$$\frac{}{\vdash_{\{x\}} x = x} \textit{ for alle variable } x.$$

ax3

$$\frac{}{x = y \vdash_{\{x,y\}} y = x} \textit{ hvor } x \textit{ og } y \textit{ har samme type.}$$

ax4

$$\frac{}{x = y \wedge y = z \vdash_{\{x,y,z\}} x = z} \textit{ hvor } x, y, z \textit{ har samme type.}$$

ax5

$$\frac{}{\varphi \vdash_\sigma \varphi} \textit{ hvor } \varphi \textit{ er en term af af type } \Omega.$$

Strukturelle regler

s1

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi}{\psi \vdash_\tau \varphi} \textit{ når } \sigma \subseteq \tau.$$

s2

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi}{\psi \wedge \chi \vdash_\sigma \varphi, \quad \chi \wedge \psi \vdash_\sigma \varphi} \textit{ når } \mathrm{FV}(\chi) \subseteq \sigma.$$

De logiske konnektiver

$\vee 1$

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi_i}{\psi \vdash_\sigma \varphi_1 \vee \varphi_2} \; \textit{hvor } \mathrm{FV}(\varphi_i) \subseteq \sigma \textit{ og } i \in \{1,2\}.$$

$\vee 2$

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi \vee \chi, \quad \psi \wedge \varphi \vdash_\sigma \mu, \quad \psi \wedge \chi \vdash_\sigma \mu}{\psi \vdash_\sigma \mu}$$

$\rightarrow$

$$\frac{\chi \wedge \varphi \vdash_\sigma \psi}{\varphi \vdash_\sigma \chi \rightarrow \psi}$$

MP

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi \rightarrow \chi, \quad \psi \vdash_\sigma \varphi}{\psi \vdash_\sigma \chi} \; \textit{(MP står for modus ponens)}$$

$\perp$

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \perp}{\psi \vdash_\sigma \varphi}$$

$\wedge$

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi_1 \quad \psi \vdash_\sigma \varphi_2}{\psi \vdash_\sigma \varphi_1 \wedge \varphi_2}$$

Bemærkning 2.3. *Man siger, at en term* $t : B$ kan substitueres *for en variabel* $x : B$ *i* φ, *såfremt ingen frie variable i* t *bliver bundet i* $\varphi[t/x]$.

Kvantorer

$\exists 1$

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi[t/x]}{\psi \vdash_\sigma \exists_{x:A}\varphi} \; \textit{hvor } x \textit{ har en fri forekomst i } \varphi \textit{ og } t : A \textit{ kan substitueres for } x.$$

$\exists 2$

$$\frac{\varphi \vdash_\sigma \chi}{\exists_{x:B}\varphi \vdash_{\sigma\setminus\{x\}} \chi} \; \textit{hvor } x \textit{ ikke forekommer i } \chi.$$

$\forall$

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi}{\psi \vdash_{\sigma\setminus\{x\}} \forall_{x:B}\varphi} \quad \textit{hvor } x \notin \mathrm{FV}(\psi)$$

Substitution

sub1

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi}{\psi[t/x] \vdash_{\sigma\setminus\{x\}\cup\mathrm{FV}(t)} \varphi[t/x]} \; \textit{hvor } t \textit{ er en term, som kan substitueres for } x$$

sub2

$$\frac{\psi \vdash_\sigma \varphi[t/x], \quad \psi \vdash_\sigma t = s}{\psi \vdash_\sigma \varphi[s/x]} \; \textit{hvor } t \textit{ er en term, som kan substitueres for } x$$

Her er et lille eksempel på et syntaktisk bevis:

Eksempel 2.4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash_\sigma \varphi}\,(ax5)}{\psi \wedge \varphi \vdash_\sigma \varphi}\,(s2) \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \vdash_\sigma \varphi \to \chi}{\psi \wedge \varphi \vdash_\sigma \varphi \to \chi}\,(s2)}{\psi \wedge \varphi \vdash_\sigma \varphi \to \chi}}{\psi \wedge \varphi \vdash_\sigma \chi}\,(MP)$$

Hvor øverste linie altså er antagelsen og hvert trin nedad i "træet" fås ved anvendelse af en af reglerne fra Definition 2.2. Man kan altså læse ud af dette bevistræ, at reglen $(\to)$ *også gælder den modsatte vej*

Eksempel 2.5. *Relationen* $\vdash_\sigma$ *er transitiv:*

$$\dfrac{\psi \vdash_\sigma \varphi \qquad \dfrac{\dfrac{(\psi \vdash_\sigma \varphi) \quad \varphi \vdash_\sigma \chi}{\varphi \wedge \psi \vdash_\sigma \chi}\,(s2)}{\psi \vdash_\sigma \varphi \to \chi}\,(\to)}{\psi \vdash_\sigma \chi}\,(MP)$$

3 Fortolkning af IHOL i en topos

I dette afsnit definerer vi hvad der forstås ved en fortolkning af et logisk system i en topos. Formelt set er et logisk system blot en mængde af symboler og nogle manipulationsregler. Med en fortolkning tillægger vi symboler og regler mening i form af objekter og pile i en topos.

3.1 De logiske pile

Inden vi beskriver den egentlige fortolkning af IHOL i en topos $\mathcal{E}$, definerer vi nogle *logiske pile* (dvs. pile $\Omega^n \to \Omega$ for $n \in \mathbb{N}$ eller $\Omega^A \to \Omega$ for et objekt A i $\mathcal{E}$) der fortolker de logiske konnektiver og kvantorer.

Definition 3.1. Negationspilen $\neg : \Omega \to \Omega$ *er karakteren* $\chi_\perp$ *for* $\perp$ *(der jo selv er karakteren for den entydige pil* $I_0 : 0 \to 1$ *jvf. Definition 1.21).*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\perp"] \arrow[d, "I_1"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Definition 3.2. Konjunktionspilen $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$ *er karakteren for produktpilen* $\langle \top, \top \rangle : 1 \to \Omega \times \Omega$

Definition 3.3. Disjunktionspilen $\vee : \Omega \times \Omega \to \Omega$ *er karakteren for billedet af koproduktpilen* $[\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle, \langle id_\Omega, \top_\Omega \rangle] : \Omega + \Omega \to \Omega \times \Omega$

Definition 3.4. Implikationspilen $\to : \Omega \times \Omega \to \Omega$ *er karakteren for egalisatoren for diagrammet*

$$\begin{tikzcd} \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\wedge"] \arrow[r, shift right, "\pi_1"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Fortolkningen af de logiske kvantorer afhænger af hvilken type der kvantiseres over. Dvs. hvis der kvantiseres over typen der fortolkes som objektet A i $\mathcal{E}$, fortolkes $\forall_A$ og $\exists_A$ som pile $\Omega^A \to \Omega$.

Definition 3.5. Alkvantorpilen $\forall_A$ *er karakteren for pilen* $\ulcorner\widetilde{\top_A}\urcorner : 1 \to \Omega^A$*, hvor* $\ulcorner\widetilde{\top_A}\urcorner$ *er den eksponentielt transponerede af pilen* $\top_A \circ \pi_A : 1 \times A \to A \to \Omega$.

Sammensætningen med projektionen π_A er en teknisk detalje der gør det muligt at tranponere $\top_A$. (Da $\pi_A : 1 \times A \to A$ er en iso, er T_A og $T_A \circ \pi_A$ i en vis forstand ens.)

Da en topos specielt er cartesisk afsluttet har vi en adjunktion $(-) \times A \dashv (-)^A$ for ethvert objekt A i $\mathcal{E}$. Koenheden for denne, dvs. den naturlige transformation $B^A \times A \xrightarrow{\varepsilon_{B,A}} B$ kaldes også evalueringen og betegnes i tilfældet $B = \Omega$ også ev_A. Vi er nu klar til at definere eksistenskvantorpilen.

Definition 3.6. Eksistenskvantorpilen *er karakteren for billedet af* $\pi_{\Omega^A} \circ \epsilon_A : \epsilon_A \to \Omega^A \times \Omega \to \Omega$*, hvor* ϵ_A *er kernen for* ev_A*. Vi har altså diagrammet*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \\
\epsilon_A \arrow[u] \arrow[r, tail, "\epsilon_A"] \arrow[d] & \Omega^A \times A \arrow[u, "ev_A"'] \arrow[d, "\pi_{\Omega^A}"] \\
\mathrm{Im}(\pi_{\Omega^A} \circ \epsilon_a) \arrow[r, tail, "\mathrm{Im}(\pi_{\Omega^A} \circ \epsilon_a)"] \arrow[d] & \Omega^A \arrow[d, "\exists_A"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

hvor det øverste og nederste kvadrat er fibrerede produktdiagrammer og det midterste er en epi-mono faktorisering og derfor kommutativt.

3.2 Fortolkningen i en topos

Efter nu at have defineret de logiske pile, er vi nu klar til at beskrive den egentlige fortolkning $[\![\cdot]\!]$ af en teori T i en topos $\mathcal{E}$.

Fortolkning af typer, funktions- og relationssymboler

For enhver type A i sproget, vælges et objekt $[\![A]\!]$ i $\mathcal{E}$. Typen Ω skal fortolkes som delobjekts-determinanten Ω i $\mathcal{E}$ (altså er $[\![\Omega]\!] = \Omega$) og typen 1 som det terminale objekt i $\mathcal{E}$.
For typer A og B, fortolkes produkttypen $A \times B$ som produktet af fortolkningerne, altså gælder $[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$.
For en type A, fortolkes potenstypen PA som objektet $\Omega^{[\![A]\!]}$ hvis eksistens er sikret da $\mathcal{E}$ er cartesisk afsluttet.
For ethvert funktionssymbol $(f : A_1, \cdots, A_n \to B)$ vælges en pil $[\![f]\!] : [\![A_1]\!], \cdots, [\![A_n]\!] \to [\![B]\!]$ i $\mathcal{E}$.
Relationssymbolet $(R \subseteq A_1, \cdots, A_n)$ fortolkes på samme måde som funktionssymbolet $(R : A_1, \cdots, A_n \to \Omega)$.
Hvis t er en term og $FV(t) = \{a_1 : A_1, \cdots, a_n : A_n\}$, så er $[\![FV(t)]\!] = [\![A_1]\!] \times \cdots \times [\![A_n]\!]$. Bemærk at i dette produkt vælges en kopi af $[\![A]\!]$ for enhver variabel i $FV(t)$ af type A. Hvis $FV(t) = \emptyset$ så er $[\![FV(t)]\!]$ det terminale objekt i $\mathcal{E}$.

Fortolkning af termer

Definition 3.7. *Enhver term t af type A fortolkes som en pil $[\![t]\!] : [\![FV(t)]\!] \to [\![A]\!]$ på følgende vis:*

f1 $*$ *af typen* 1 *fortolkes som* $id_1 : 1 \to 1$.

f2 *Hvis a er en variabel af typen A fortolkes a som identitetspilen $id_{[\![A]\!]} : [\![A]\!] \to [\![A]\!]$.*

f3 *Hvis a og b er termer af typen A hhv. B fortolkes (a,b) af typen $A \times B$ som pilen $[\![a]\!] \times [\![b]\!] : [\![FV(a)]\!] \times [\![FV(b)]\!] \to [\![A]\!] \times [\![B]\!]$, dvs. produktpilen $\langle [\![a]\!]\pi_{[\![a]\!]}, [\![b]\!]\pi_{[\![b]\!]} \rangle$, hvor $\pi_{[\![a]\!]}$ og $\pi_{[\![b]\!]}$ er projektionerne på $[\![A]\!]$ hhv. $[\![B]\!]$.*

f4 *Hvis $a_1, \dots, a_n$ er termer af typerne $A_1, \dots, A_n$ respektivt, og $f : A_1, \dots, A_n \to B$ er et funktionssymbol, fortolkes $f(a_1, \dots, a_n)$ som den sammensatte pil*

$$[\![FV(f(a_1, \dots, a_n))]\!] \xrightarrow{\prod_{i=1}^n [\![a_i]\!]\pi_{[\![FV(a_i)]\!]}} \prod_{i=1}^n [\![A_i]\!] \xrightarrow{[\![f]\!]} [\![B]\!]$$

hvor $\pi_{[\![FV(a_i)]\!]}$ er projektionen $[\![FV(f(a_1, \dots, a_n))]\!] \to [\![FV(a_i)]\!]$.

f5 *Da relationssymboler blot fortolkes som funktionssymboler med typen Ω, er fortolkningen af evaluering af disse som ovenfor.*

f6 *Hvis a og b er termer af type A, så er fortolkningen af $a = b$ karakteren for egalisatoren til diagrammet*

$$\begin{tikzcd} {[\![FV(a=b)]\!]} \arrow[r, shift left, "\pi_{[\![FV(a)]\!]}"] \arrow[r, shift right, "\pi_{[\![FV(b)]\!]}"'] & {[\![FV(a)]\!]} \arrow[r, "{[\![a]\!]}"] \\[-20pt] & {[\![FV(b)]\!]} \arrow[r, "{[\![b]\!]}"'] & {[\![A]\!]} \end{tikzcd}$$

hvor $\pi_{[\![FV(a)]\!]}$ og $\pi_{[\![FV(b)]\!]}$ er de oplagte projektioner.

f7 *Hvis α er en term af type PA og a en term af type A fortolkes $a \in \alpha$ som den sammensatte pil $ev_{[\![A]\!]}([\![\alpha]\!] \times [\![a]\!]) : [\![FV(a \in \alpha)]\!] \to \Omega^{[\![A]\!]} \times [\![A]\!] \to \Omega$ (bemærk at $[\![FV(a \in \alpha)]\!] = [\![FV(\alpha)]\!] \times [\![FV(a)]\!]$).*

f8 *Hvis φ er en term af type Ω er fortolkningen $[\![\{x \in A | \varphi\}]\!] : [\![FV(\varphi) \backslash \{x\}]\!] \to \Omega^{[\![A]\!]}$ den transponerede til sammensætningen*
$[\![\varphi]\!]\pi_{[\![FV(\varphi)]\!]} : [\![FV(\varphi) \backslash \{x\}]\!] \times [\![A]\!] \to [\![FV(\varphi)]\!] \to \Omega$.
(Bemærk at hvis x er fri i φ, vil $[\![FV(\varphi) \backslash \{x\}]\!] \times [\![A]\!]$ være isomorf med $[\![FV(\varphi)]\!]$ og $\pi_{[\![FV(\varphi)]\!]}$ er så den tilhørende isomorfi.)

f9 *Formlerne $\top$ og $\bot$ fortolkes som pilene $\top$ (Definition 1.14) hhv. $\bot$ (Definition 1.21).*

f10 *Hvis φ og ψ er termer af type Ω fortolkes $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ eller $\varphi \to \psi$ som pilen $[\![\varphi]\!] \times [\![\psi]\!] : [\![FV(\varphi)]\!] \times [\![FV(\psi)]\!] \to \Omega \times \Omega$ sammensat med pilen $\wedge$, $\vee$ eller $\to$ respektivt. Fx er $[\![\varphi \to \psi]\!]$ den pil så diagrammet*

$$\begin{tikzcd} {[\![FV(\varphi \to \psi)]\!]} \arrow[r, "{[\![\varphi]\!] \times [\![\psi]\!]}"] \arrow[dr, "{[\![\varphi \to \psi]\!]}"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\to"] \\ & \Omega \end{tikzcd}$$

kommuterer.
Fortolkningen af $\neg\varphi$ fås på tilsvarende vis ved at sammensætte $[\![\varphi]\!]$ med pilen $\neg : \Omega \to \Omega$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\llbracket FV(\neg\varphi) \rrbracket \arrow[r, "\llbracket \varphi \rrbracket"] \arrow[dr, "\llbracket \neg\varphi \rrbracket"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
 & \Omega
\end{tikzcd}$$

kommuterer.

f11 *Hvis φ er en term af type Ω evt. med frie forekomster af variablen x af type A, da er fortolkningen af $\forall_{x:A}\varphi$ en pil $\llbracket FV(\forall_{x:A}\varphi) \rrbracket \to \Omega$ der er defineret på følgende måde:*

Hvis x er fri i φ: *Da er $\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket$ den sammensatte pil*

$$\llbracket FV(\varphi)\backslash\{x\} \rrbracket \xrightarrow{\ulcorner \llbracket \varphi \rrbracket \urcorner} \Omega^{\llbracket A \rrbracket} \xrightarrow{\forall_{\llbracket A \rrbracket}} \Omega$$

hvor $\ulcorner \llbracket \varphi \rrbracket \urcorner$ er den transponerede af $\llbracket \varphi \rrbracket : \llbracket FV(\varphi)\backslash\{x\} \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \to \Omega$.

Hvis x ikke er fri i φ: *Da er $\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket$ den sammensatte pil*

$$\llbracket FV(\varphi) \rrbracket \xrightarrow{\ulcorner \widetilde{\llbracket \varphi \rrbracket} \urcorner} \Omega^1 \xrightarrow{\forall_1} \Omega$$

hvor $\ulcorner \widetilde{\llbracket \varphi \rrbracket} \urcorner$ er den transponerede af

$$\llbracket FV(\varphi) \rrbracket \times 1 \xrightarrow{\pi_{\llbracket FV(\varphi) \rrbracket}} \llbracket FV(\varphi) \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \varphi \rrbracket} \Omega$$

(Bemærk at da både $\pi_{\llbracket FV(\varphi) \rrbracket}$ og $\forall_1$ er isomorfier, er $\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket$ og $\llbracket \varphi \rrbracket$ i en vis forstand ens).

Fortolkningen af $\exists_{x:A}\varphi$ fås helt analogt.

4 Ekstern kontra intern fortolkning

Vi har valgt en *intern* formulering af fortolkning, dvs. formlen φ fortolkes som en pil $\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket \to \Omega$ og fortolkningen af komplekse formler opbygges af fortolkningen for simplere formler ved passende sammensætninger med logiske pile. Denne måde at fortolke på kaldes intern, fordi den er defineret ved operationer (sammensætning), objekter og pile der en en del af den topos man fortolker i.

Ækvivalent hermed, kan laves en *ekstern* fortolkning. Her betragtes formlen φ som et delobjekt af $\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket$ og komplekse formler fås ved at anvende visse funktorer mellem mængder af delobjekter (betragtet som katagorier) på simplere fomler. Denne måde at fortolke på kaldes *ekstern*, fordi den er defineret ved delobjekter og funktorer mellem mængder af disse, der jo ikke er en del af den topos man fortolker i.

Mens den interne fortolkning er nemmere (synes vi) at forstå, de logiske konnektiver er operationer på objektet af sandhedsværdier, er det ofte nemmere at bevise egenskaber med den eksterne.

Ækvivalensen mellem disse to formuleringer går via den naturlige isomorfi givet i Sætning 1.10, men er ikke oplagt for alle logiske konnektiver. Vi giver i dette afsnit beviser for de sammenhænge vi får brug for i Soundness-beviset.

4.1 Logiske pile og lattice-egenskaber

Ifølge [Gol79] s. 151 er $\mathrm{Sub}(D)$ en distributiv lattice, dvs. en partielt ordnet mængde, hvor vilkårlige to elementer har både infimum og supremum og infimum distribuerer over supremum; dvs. $f \cap (g \cup h) = (f \cap g) \cup (f \cap h)$ for $f, g, h \in \mathrm{Sub}(D)$. I $\mathrm{Sub}(D)$ er infimum af to delobjekter f og g (noteres $f \cap g$) det fibrerede produkt af disse:

$$
\begin{tikzcd}
f \cap g \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "f\cap g"] & B \arrow[d, tail, "g"] \\
A \arrow[r, tail, "f"] & D
\end{tikzcd}
$$

Supremum $f \cup g$ af f og g er billedet af koproduktpilen $[f, g] : A + B \to D$:

$$
\begin{tikzcd}
A + B \arrow[rr, "{[f,g]}"] \arrow[dr] & & D \\
& \mathrm{Im}([f, g]) \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}
$$

Sætning 4.1. *I en topos gælder der for $f, g \in \mathrm{Sub}(D)$:*

a) $\chi_{f \cap g} = \chi_f \wedge \chi_g$

b) $\chi_{f \cup g} = \chi_f \vee \chi_g$

Bevis: ad a): Vi skal vise at det ydre kvadrat i

$$
\begin{tikzcd}
f \cap g \arrow[r, tail, "f\cap g"] \arrow[d] & D \arrow[d, "{\langle \chi_f, \chi_g \rangle}"] \\
1 \arrow[r, "{\langle \top, \top \rangle}"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

er et fibreret produktdiagram. Det nederste kvadrat er pr. definition af pilen $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$ et fibreret produktdiagram, så hvis vi kan vise at det øverste kvadrat er et fibreret produkt, følger det ønskede af PBL. Vi viser først at det kommuterer. Vi ved at der findes $h : f \cap g \to A$ så $f \cap g = fh$. Betragt nu diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
f \cap g \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f\cap g"] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I_A"'] & D \arrow[dl, "I_D"'] \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

hvor den øverste trekant kommuterer og det nederste kvadrat er et fibreret produktdiagram. Vi har nu at $\chi_f \circ f \cap g = \chi_f f h = \top I_A h$. Men da $I_A = I_D f$ fås at

$$\chi_f \circ f \cap g = \top I_D f h = \top I_D \circ f \cap g$$

På tilsvarende vis fås ved at betragte g i stedet for f at

$$\chi_g \circ f \cap g = \top I_D \circ f \cap g$$

så vi kan konkludere at

$$\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ f \cap g = \langle \top, \top \rangle I_D \circ f \cap g.$$

Men da $I_{f \cap g} = I_D \circ f \cap g$ fås nu som ønsket

$$\langle \chi_f, \chi_g \rangle \circ f \cap g = \langle \top, \top \rangle I_{f \cap g}$$

så kvadratet kommuterer.
Lad der nu være givet et objekt C og to pile $\lambda : C \to D$ og $I_C : C \to 1$ sådan at $\langle \chi_f, \chi_g \rangle \lambda = \langle \top, \top \rangle I_C$. Betragt det fibrerede produktdiagram

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "\mu"] \arrow[drr, bend left, "\lambda"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & D \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Da $\chi_f \lambda = \top_C$ findes der en entydig bestemt pil $\mu : C \to A$ så $\lambda = f\mu$ og $I_C = I_A \mu$. Betragt dernæst diagrammet

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\mu"] \arrow[dddr, bend right, "I_C"'] & & \\
& f \cap g \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, tail, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & D \arrow[d, "\chi_g"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Her har vi at $\top_C = \chi_g \lambda = \chi_f \lambda$ og $\lambda = f\mu$, så $\top_C = \chi_g f \mu$, dvs. der findes en entydig bestemt pil $\varphi : C \to f \cap g$ sådan at $\mu = g'\varphi$ og $I_C = I_{f \cap g}\varphi$. Altså er $\lambda = fg'\varphi = f \cap g \circ \varphi$ og $I_C = I_{f \cap g}\varphi$ som ønsket.
<u>ad b):</u> Kernen i beviset består i at vise, at begge kvadrater i diagrammet

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi_g f"'] & D \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] & B \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\chi_g f"] \\
\Omega \arrow[r, "\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle"] & \Omega \times \Omega & \Omega \arrow[l, "\langle id_\Omega, \top_\Omega \rangle"']
\end{tikzcd} \tag{12}$$

er fibrerede produktdiagrammet. Pga. af symmetri er det nok at vise egenskaben for fx. det venstre kvadrat. Vi skal altså, for at vise kommutativitet, se at $\langle \chi_f, \chi_g \rangle f = \langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle \chi_g f$. Men da $\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle \chi_g f = \langle \top_\Omega \chi_g, \chi_g \rangle f$ er det nok at vise $\top I_\Omega \chi_g f = \chi_f f$. Betragt hertil det firbrerede produktdiagram

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I_A"'] & D \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dl, "I_D"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Her er $\chi_f f = \top I_A = \top I_D f$, men $I_D = I_\Omega \chi_g$ så $\chi_f f = \top I_\Omega \chi_g f$ som ønsket.
Lad der nu være givet $\lambda : Z \to D$ og $\gamma : Z \to \Omega$ så randen af diagrammet

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\lambda"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi_g f"'] & D \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
& \Omega \arrow[r, "\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

kommuterer, dvs. $\langle \chi_f, \chi_g \rangle \lambda = \langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle \gamma$. Vi skal vise at der findes en entydig bestemt pil $\varphi : Z \to A$ så $\lambda = f\varphi$ og $\gamma = \chi_g f \varphi$. Bemærk at antagelsen specielt medfører at $\chi_g \lambda = \gamma$ så det er nok at vise, at φ er entydig bestemt mht. til egenskaben $\lambda = f\varphi$, thi så følger at $\gamma = \chi_g \lambda = \chi_g f \varphi$. Så betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, bend right, "\gamma"'] \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\lambda"] & & \\
\Omega \arrow[dr, "I_\Omega"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I_A"] & D \arrow[d, "\chi_g"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

hvor antagelsen medfører at randen kommuterer. Da kvadratet nederst til højre pr. definition er et fibreret produkt, findes en entydig bestemt pil $\varphi : Z \to A$ så $\lambda = f\varphi$. Så begge kvadrater i (12) er fibrerede produkter.
Af Lemma 1.18 følger nu at også

$$\begin{tikzcd}
A + B \arrow[r, "{[f,g]}"] \arrow[d] & D \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
\Omega + \Omega \arrow[r, "{[\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle, \langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle]}"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

er et fibreret produktdiagram. Lemma 1.19 og definitionen af $f \cup g$ giver os at så er

$$\begin{tikzcd}
f \cup g \arrow[r, "f \cup g"] \arrow[d] & D \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
E \arrow[r, "{\mathrm{Im}([\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle, \langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle])}"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

er et fibreret produktdiagram, som sammen med definitionen af pilen $\vee : \Omega \times \Omega \to \Omega$ og PBL giver at randen af diagrammet

$$\begin{tikzcd}
f \cup g \arrow[r, "f \cup g"] \arrow[d] & D \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\
E \arrow[r, "{\mathrm{Im}([\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle, \langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle])}"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\vee"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

også er et fibreret produktdiagram. Af Ω-aksiomet følger nu at $\chi_{f\cup g} = \chi_f \vee \chi_g$. $\square$ Ved isomorfien givet i Sætning 1.10 induceres ordningen fra $\mathrm{Sub}(D)$ på $\mathrm{Hom}(D,\Omega)$. Med denne inducerede ordning $\leq_D$ gælder:

Korollar 4.2. *Den partielt ordnede mængde* $(\mathrm{Hom}(D,\Omega), \leq_D)$ *er en distributiv lattice med*

(1) $\inf(s,t) = s \wedge t$

(2) $\sup(s,t) = s \vee t$

Bevis: Vi har netop vist, at $\ker(s \wedge t) = \ker(s) \wedge \ker(t)$. At $s \wedge t \leq_D r$ betyder jo netop, at $\ker(s \wedge t) \leq \ker(r)$. Resultatet følger nu af at $\inf(\ker(s), \ker(t)) = \ker(s) \cap \ker(t)$. På tilsvarende måde vises påstanden (2). $\square$

Bemærkning 4.3. *For to formler φ og ψ med* $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \sigma$ *og* $\mathrm{FV}(\psi) \subseteq \sigma$ *definerer vi*

$$[\![\varphi \mathbin{\hat{\wedge}} \psi]\!] = \wedge \circ \langle [\![\varphi]\!] \pi_1, [\![\psi]\!] \pi_2 \rangle \circ \pi_{\varphi \wedge \psi},$$

hvor projektionerne er

$$\begin{tikzcd}
 & & {[\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!]} \\
{[\![\sigma]\!]} \arrow[r, "\pi_{\varphi\wedge\psi}"] & {[\![\mathrm{FV}(\varphi \wedge \psi)]\!]} \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & {[\![\mathrm{FV}(\psi)]\!]}
\end{tikzcd}$$

dvs. $\pi_1 \pi_{\varphi\wedge\psi} = \pi_\varphi$ *og* $\pi_2 \pi_{\varphi\wedge\psi} = \pi_\psi$. *Det følger nu at*

$$[\![\varphi \mathbin{\hat{\wedge}} \psi]\!] = [\![\hat{\varphi}]\!] \wedge [\![\hat{\psi}]\!].$$

Det ses specielt ifølge korollaret, at

$$\inf([\![\hat{\varphi}]\!], [\![\hat{\psi}]\!]) = [\![\varphi \mathbin{\hat{\wedge}} \psi]\!].$$

Lemma 4.4. *Lad f, g, h være delobjekter af et objekt D i en vilkårlig topos, så gælder*

1. $f \cap h \simeq g \cap h$ *hvis og kun hvis* $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$

2. $\chi_f \wedge \chi_h = \chi_g \wedge \chi_h$ *hvis og kun hvis* $\chi_f \circ h = \chi_g \circ h$

Bevis: Se [Gol79] p. 163. $\square$

Lemma 4.5. *I enhver lattice gælder*

$$f \cap h \leq g \text{ hvis og kun hvis } (f \cap h) \cap g \simeq f \cap h$$

Bevis: Vi har altid $(f \cap h) \cap g \leq f \cap h$, da $f \cap h = \inf(f, h)$, så vi skal blot vise, at $f \cap h \leq g$ hvis og kun hvis $f \cap h \leq (f \cap h) \cap g$.

Antag, at $f \cap h \leq (f \cap h) \cap g$. Da $(f \cap h) \cap g \leq g$ fås $f \cap h \leq g$. Omvendt, hvis $f \cap h \leq g$ så er $f \cap h$ en nedre grænse for g, f og h, men den største nedre grænse for disse er jo $(f \cap h) \cap g$ så $f \cap h \leq (f \cap h) \cap g$ $\square$

Korollar 4.6. *Lad f, g, h være delobjekter af et objekt D i en vilkårlig topos, så gælder*

$$f \cap h \leq g \text{ hvis og kun hvis } \chi_{f \cap g} \circ h = \chi_f \circ h$$

Bevis:

$$\begin{array}{rcll} f \cap h \leq g & \Leftrightarrow & (f \cap h) \cap g \simeq f \cap h & \text{(Lemma 4.4)} \\ & \Leftrightarrow & (f \cap g) \cap h \simeq f \cap h & \text{(en lattice er kommutativ og associativ)} \\ & \Leftrightarrow & \chi_{f \cap g} \circ h = \chi_f \circ h & \text{(Lemma 4.5 (1))} \end{array}$$

□

4.2 Funktorerne $\forall_\pi$ og $\exists_\pi$

For to objekter A, B i en topos har vi den ordensbevarende afbilding

$$\pi^* : \mathrm{Sub}(B) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A \times B)$$

hvor $\pi : A \times B \longrightarrow B$ er projektionen. π^* kan betragtes som en funktor, og denne funktor har en højreadjungeret (for en given projektion π), som vi kalder $\forall_\pi : \mathrm{Sub}(A \times B) \longrightarrow \mathrm{Sub}(B)$. ($\pi^*$ burde egentlig noteres π_B^* da der er tale om en afbilding hørende til projektionen π_B. Dette burde dog ikke give anledning til forvirring.)

Definition 4.7. *Lad $\mathcal{E}$ være en topos, A, B to objekter i $\mathcal{E}$ og lad $f \in \mathrm{Sub}(A \times B)$. Så er*

$$\forall_\pi(f) = eg(\ulcorner \chi_f \urcorner, \ulcorner \top_{A \times B} \urcorner)$$

Lemma 4.8. *Lad $f : C \longrightarrow B$ være (en repræsentant for) et delobjekt af et objekt B. Der gælder*

$$\pi^*(f) = id_A \times f : A \times C \longrightarrow A \times B$$

Bevis: Vi skal vise, at følgende diagram er et fibreret produkt.

$$\begin{tikzcd} A \times C \arrow[r, tail, "id_A \times f"] \arrow[d, "\pi_C"'] & A \times B \arrow[d, "\pi"] \\ C \arrow[r, tail, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{13}$$

Diagrammet kommuterer pr. definition af produktpilen (se diagram (14)).

Antag, at vi har givet et objekt D samt to pile $\alpha : D \longrightarrow C$ og $\beta : D \longrightarrow A \times B$ sådan at $\pi\beta = f\alpha$. Vi har altså følgende diagram:

$$\begin{tikzcd} & & D \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] & A \times C \arrow[l, "id_A \times f"'] \arrow[r, "\pi_C"'] \arrow[ll, bend left, "id_A \pi_A"] & C \end{tikzcd}$$

På grund af produkt-egenskaben findes en entydig pil $\varphi : D \longrightarrow A \times C$ således at

$$\begin{array}{lcll} \pi_C \varphi & = & \alpha & \text{og} \\ \pi_A(id_A \times f)\varphi & = & \pi_A \beta & \end{array}$$

Da $\pi\beta = f\alpha$ pr. antagelse, har vi også

$$\pi\beta = f\pi_C\varphi$$

Betragt nu følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[d, "\varphi"] & & \\
 & & A\times C \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dd, "id_A\times f"] \arrow[dr, "\pi_C"] & & \\
 & A \arrow[dl, "id_A"'] & & C \arrow[dr, "f"] & \\
A & & A\times B \arrow[ll, "\pi_A"'] \arrow[rr, "\pi"] & & B
\end{tikzcd} \tag{14}$$

Produkt-egenskaben betyder, at $(id_A \times f)\varphi$ er den entydige pil fra D til $A \times B$ som får diagrammet til at kommutere, men da $\beta : D \longrightarrow A\times B$ også får diagrammet til at kommutere, må $\beta = (id_A \times f)\varphi$. φ er altså den søgte pil, som viser, at diagram (13) er et fibreret produkt.

□

Korollar 4.9. *Et diagram af typen*

$$\begin{tikzcd}
C\times A\times B \arrow[r, "\pi_{C\times A}"] \arrow[d, "\pi_{A\times B}"'] & C\times A \arrow[d, "\pi_A"] \\
A\times B \arrow[r, "\pi'_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

er et fibreret produkt.

Bevis:

$$\pi_{C\times A} = id_C \times \pi'_A$$

Så korollaret følger af diagram (13). □

Sætning 4.10.

$$\pi^* \dashv \forall_\pi$$

Bevis: Da Sub(B) og Sub$(A \times B)$ er preordninger, gælder $\pi^* \dashv \forall_\pi$ hvis og kun hvis

$$f \leq \forall_\pi(g) \Leftrightarrow \pi^*(f) \leq g$$

for $f \in \text{Sub}(B), g \in \text{Sub}(A \times B)$ (se [vO99] p. 46 ex. c).

Lad $f : C \longrightarrow B$ og $g : D \longrightarrow A \times B$. I følge Lemma 4.8 har vi

$$\pi^*(f) = id_A \times f : A \times C \longrightarrow A \times B$$

Betragt diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, tail, "g"] & & A \times B \arrow[r, shift left, "\chi_g"] \arrow[r, shift right, "\top_{A\times B}"'] \arrow[dd, "\pi"] & \Omega \\
& A \times C \arrow[ur, tail, "\pi^*(f)"'] \arrow[dd] & & \\
\forall_\pi(g) \arrow[rr, tail] & & B \arrow[r, shift left, "\ulcorner \chi_g \urcorner"] \arrow[r, shift right, "\ulcorner \top_{A\times B} \urcorner"'] & \Omega^A \\
& C \arrow[ur, tail, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

hvor $g = eg(\chi_g, \top_{A\times B})$. Vi har

$$
\begin{aligned}
& \pi^*(f) \leq g & \\
\Leftrightarrow\quad & \chi_g \circ (id_A \times f) = \top_{A\times B} \circ (id_A \times f) & \text{(egalisator-egenskaben)} \\
\Leftrightarrow\quad & \ulcorner \chi_g \circ (id_A \times f) \urcorner = \ulcorner \top_{A\times B} \circ (id_A \times f) \urcorner & \\
\Leftrightarrow\quad & \ulcorner \chi_g \urcorner \circ f = \ulcorner \top_{A\times B} \urcorner \circ f & \text{(se } (*)) \\
\Leftrightarrow\quad & f \leq \forall_\pi(g) & \text{(egalisator-egenskaben)}
\end{aligned}
$$

$$(*) : \ulcorner \chi_g \circ (id_A \times f) \urcorner = \ulcorner \chi_g \urcorner \circ f$$

fordi følgende diagram kommuterer. Tilsvarende for $\ulcorner \top_{A\times B} \circ (id_A \times f) \urcorner$.

$$
\begin{tikzcd}
A \times \Omega^A \arrow[dr, "ev_A"] & \\
A \times B \arrow[u, "id_A \times \ulcorner \chi_g \urcorner"] \arrow[r, "\chi_g"] & \Omega \\
A \times C \arrow[u, tail, "id_A \times f"] &
\end{tikzcd}
$$

□

Funktoren π^* har også en venstreadjungeret, som kaldes $\exists_\pi : \mathrm{Sub}(A \times B) \longrightarrow \mathrm{Sub}(B)$.

Definition 4.11. *Lad $\mathcal{E}$ være en topos, A, B to objekter i $\mathcal{E}$ og lad $f \in \mathrm{Sub}(A \times B)$. Da er*

$$\exists_\pi(f) = \mathrm{Im}(\pi f)$$

hvor $\pi : A \times B \longrightarrow B$

Sætning 4.12.

$$\exists_\pi \dashv \pi^*$$

Bevis: Sætningen vises på samme måde som Sætning 4.10. Det vil sige, vi skal vise, at

$$f \leq \pi^*(g) \Leftrightarrow \exists_\pi(f) \leq g$$

hvor $g : C \longrightarrow B \in \mathrm{Sub}(B), f : X \times Y \longrightarrow \mathrm{Sub}(A \times B)$.

Antag først, at $\exists_\pi(f) \leq g$. Pr. definition af $\exists_\pi$, har vi så følgende kommuterende diagram

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, tail, "k"] \arrow[dr, "\exists_\pi(f)"] & C \arrow[d, tail, "g"] \\
X \times Y \arrow[ur, two heads, "e"] \arrow[r, "f"'] & A \times B \arrow[r, "\pi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Pr. definition af π^* har vi desuden det fibrerede produkt

$$\begin{tikzcd}
A \times C \arrow[r, "\pi^*(g)"] \arrow[d, "\pi_C"'] & A \times B \arrow[d, "\pi"] \\
C \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

så da $\pi f = gke$ findes altså en pil $\alpha : X \times Y \longrightarrow A \times C$ sådan at $f = \pi^*(g)\alpha$, dvs. $f \leq \pi^*(g)$.

Antag omvendt, at $f \leq \pi^*(g)$. Da $\pi^*(g) = id_A \times g$ (Lemma 4.8) har vi det kommuterende diagram

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times C \arrow[r, "id_A \times g"] \arrow[d, "\pi_C"'] & A \times B \arrow[d, "\pi"] \\
C \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd} \tag{15}$$

Vi ved, at $g = eg(\top_B, \chi_g)$ (Lemma 1.13) så

$$\begin{array}{rcll}
\top_B(\pi f) & = & \top_B(g\pi_C h) & \text{diagram (15)} \\
 & = & \chi_g(g\pi_C h) & \text{da } g = eg(\top_B, \chi_g) \\
 & = & \chi_g(\pi f) &
\end{array}$$

Lav nu det frie produktdiagram (dette kan vi altid gøre i en topos) af πf med πf:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\pi f"] \arrow[d, "\pi f"'] & B \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "\chi_g"] & \\
B \arrow[r, "p"] \arrow[drr, bend right, "\top_B"'] & R \arrow[dr, "\alpha"] & \\
 & & \Omega
\end{tikzcd} \tag{16}$$

så er

$$\mathrm{Im}(\pi f) = eg(p, q)$$

pr. definition (se [Gol79] s.111-112). Da $\top_B(\pi f) = \chi_g(\pi f)$ ifølge ovenstående udregning, så findes der en pil α, som vist på diagram (16).

$$\begin{array}{rcll}
\top_B \circ \exists_\pi(f) & = & \alpha p \circ \exists_\pi(f) & \text{diagram (16)} \\
 & = & \alpha q \circ \exists_\pi(f) & \text{da } \exists_\pi(f) = eg(p, q) \\
 & = & \chi_g \circ \exists_\pi(f) & \text{diagram (16)}
\end{array}$$

Da $g = eg(\top_B, \chi_g)$ findes, pga. egalisator-egenskaben en pil $\beta : \exists_\pi(f) \longrightarrow C$ således at $g\beta = \exists_\pi(f)$, det vil sige $\exists_\pi(f) \leq g$.

□

Lemma 4.13. *Givet funktorer*

$$\mathcal{C} \underset{F_1}{\overset{G_1}{\rightleftarrows}} \mathcal{D} \underset{F_2}{\overset{G_2}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}$$

hvor $F_1 \dashv G_1$ *og* $F_2 \dashv G_2$. *Da er* $F_1F_2 \dashv G_2G_1$

Bevis: Se [Lan98] s. 103. □

Sætning 4.14 (Beck-Chevalley betingelsen for funktoren $\forall_\pi$). *Givet et fibreret produkt af typen* (17) *i en topos*

$$\begin{array}{ccc} C \times A \times B & \xrightarrow{\pi_{C\times A}} & C \times A \\ {\scriptstyle \pi_{A\times B}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_A} \\ A \times B & \xrightarrow[\pi'_A]{} & A \end{array} \qquad (17)$$

vil følgende diagram kommutere:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sub}(C \times A \times B) & \xleftarrow{\pi^*_{C\times A}} & \mathrm{Sub}(C \times A) \\ {\scriptstyle \forall_{\pi_{A\times B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \forall_{\pi_A}} \\ \mathrm{Sub}(A \times B) & \xleftarrow[(\pi'_A)^*]{} & \mathrm{Sub}(A) \end{array}$$

Bevis: Vi har et tilsvarende lemma for funktoren $\exists_\pi$ (se [Lan92] p.174 prop. 2), dvs. følgende diagram kommuterer, når vi har det fibrerede produkt (17)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sub}(C \times A \times B) & \xrightarrow{\exists_{\pi_{C\times A}}} & \mathrm{Sub}(C \times A) \\ {\scriptstyle \pi^*_{A\times B}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi^*_A} \\ \mathrm{Sub}(A \times B) & \xrightarrow[\exists_{\pi'_A}]{} & \mathrm{Sub}(A) \end{array} \qquad (18)$$

Da $\pi^*_{A\times B} \dashv \forall_{\pi_{A\times B}}$ (Sætning 4.10) og $\exists_{\pi_{C\times A}} \dashv \pi^*_{C\times A}$ (Sætning 4.12) er $\exists_{\pi_{C\times A}}\pi^*_{A\times B} \dashv \forall_{\pi_{A\times B}}\pi^*_{C\times A}$ ifølge Lemma 4.13. Samtidig er $\pi^*_A \dashv \forall_{\pi_A}$ og $\exists_{\pi'_A} \dashv \pi'^*_A$ så vi har også $\pi^*_A\exists_{\pi'_A} \dashv \pi'^*_A\forall_{\pi_A}$.

Da $\pi^*_A\exists_{\pi'_A} = \exists_{\pi_{C\times A}}\pi^*_{A\times B}$ i følge diagram (18), har denne funktor to højreadjungerede, nemlig $\pi'^*_A\forall_{\pi_A}$ og $\forall_{\pi_{A\times B}}\pi^*_{C\times A}$ og da adjungerede er entydige op til isomorfi er $\pi'^*_A\forall_{\pi_A} \simeq \forall_{\pi_{A\times B}}\pi^*_{C\times A}$. Betragtet som funktorer på ækvivalensklasser af delobjekter (hvilket jo er det vi her interesserer os for) har vi $\pi'^*_A\forall_{\pi_A} = \forall_{\pi_{A\times B}}\pi^*_{C\times A}$. □

5 Topoi og logik

I logik skelner vi mellem syntaks på den ene side og semantik på den anden. At en formel φ kan bevises syntaktisk under antagelse af en formel ψ noteres $\psi \vdash_\sigma \varphi$ og betyder, at der findes et formelt bevis (som fx bevistræerne i afsnittet "Intuitionistisk højere ordens logik") for φ. I et formelt bevis skal man alene ud fra axiomerne og antagelserne ved hjælp af inferensreglerne kunne udlede det ønskede resultat. Man kan med andre ord betragte et formelt bevis som rendyrket symbolmanipulation (dermed ikke sagt at det er trivielt!).

I den semantiske verden tillader vi symbolerne at have en betydning – vi fortolker symbolerne. Et semantisk bevis er et matematisk bevis i sædvanlig forstand. Vi er interesserede i at etablere en forbindelse mellem den syntaktiske og den semantiske verden, således at et resultat det ene sted også er gyldigt det andet sted. Men inden inden vi når så langt, får vi brug for følgende.

Definition 5.1. *For hvert objekt* $[\![\sigma]\!]$ *defineres en ordning på* $\mathrm{Hom}([\![\sigma]\!], \Omega)$ *ved*

$$[\![\psi]\!]\pi_\psi \leq_\sigma [\![\varphi]\!]\pi_\varphi \Leftrightarrow \ker([\![\psi]\!]\pi_\psi) \leq \ker([\![\varphi]\!]\pi_\varphi) \ \textit{i}\ \mathrm{Sub}([\![\sigma]\!])$$

Det er oplagt at relationen $[\![\sigma]\!]$ er en ordning, da den er induceret af ordningen på $\mathrm{Sub}([\![\sigma]\!])$.

Vi bruger også notationen $[\![\hat{\varphi}]\!]$ for $[\![\varphi]\!]\pi_\varphi$.

Lemma 5.2.

$$\ker([\![\hat{\varphi}]\!]) = (\pi_\varphi)^*(\ker[\![\varphi]\!])$$

Bevis:

$$\begin{tikzcd}
\pi_\varphi^*(\ker[\![\varphi]\!]) \arrow[r, tail, "\pi_\varphi^*(\ker[\![\varphi]\!])"] \arrow[d] & {[\![\sigma]\!]} \arrow[d, "\pi_\varphi"] \\
\ker[\![\varphi]\!] \arrow[r, tail, "\ker[\![\varphi]\!]"] \arrow[d] & {[\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!]} \arrow[d, "{[\![\varphi]\!]}"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Da begge de små kvadrater i diagrammet er fibrerede produkter pr. definition, bliver den ydre firkant det også. Af Ω-aksiomet følger så at $(\pi_\varphi)^*(\ker[\![\varphi]\!]) = \ker([\![\varphi]\!]\pi_\varphi) = \ker([\![\hat{\varphi}]\!])$ $\square$

Vi kan nu definere, hvad det vil sige, at en sekvent er *sand* for en fortolkning:

Definition 5.3. *En sekvent* $\psi \vdash_\sigma \varphi$ *er sand for fortolkningen hvis* $[\![\hat{\psi}]\!] \leq_\sigma [\![\hat{\varphi}]\!]$.

Lemma 5.4. *For en formel* φ *med* $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \sigma$ *og en fortolkning (topos)* $\mathcal{E}$ *er følgende ensbetydende:*

1. $\hat{\top} \leq_\sigma [\![\hat{\varphi}]\!]$
2. $[\![\hat{\varphi}]\!] = \top_{[\![\sigma]\!]}$
3. $(\pi_\varphi)^*(\ker[\![\varphi]\!])$ *er det maksimale delobjekt af* $[\![\sigma]\!]$.

Bevis:

1. $\Leftrightarrow$ 2. $\hat{\top} \leq_\sigma [\![\hat{\varphi}]\!] \Leftrightarrow^{def} \ker(\top\pi_\top) \leq \ker([\![\varphi]\!]\pi_\varphi)$, hvor $\pi_\top : [\![\sigma]\!] \longrightarrow 1$, dvs $\pi_\top = I_{[\![\sigma]\!]}$, altså $\ker(\top_{[\![\sigma]\!]}) \leq \ker([\![\hat{\varphi}]\!])$. $\ker(\top)$ er det maksimale delobjekt af 1, derfor er $\pi_\top^*(\ker(\top))$ det maksimale delobjekt af $[\![\sigma]\!]$, idet $\pi_\top^*$ er ordensbevarende. Lemma 5.2 giver nu sammen med ovenstående, at $\ker(\top_{[\![\sigma]\!]})$ er det maksimale delobjekt af $[\![\sigma]\!]$ og dermed er $\ker(\top_{[\![\sigma]\!]}) = \ker([\![\hat{\varphi}]\!])$. Af entydigheden af karakteristiske funktioner (Ω-aksiomet) følger det nu, at $\top_{[\![\sigma]\!]} = [\![\hat{\varphi}]\!]$.

1. $\Leftrightarrow$ 3. Vi har $\hat{\top} \leq_\sigma [\![\hat{\varphi}]\!] \Leftrightarrow \pi_\top^*(\ker\top) \leq \pi_\varphi^*(\ker[\![\varphi]\!])$ (Lemma 5.2) og da $\pi_\top^*(\ker\top)$ er det maksimale delobjekt af $[\![\sigma]\!]$, er $\pi_\varphi^*(\ker[\![\varphi]\!])$ også maksimal. $\square$

Definition 5.5. *Hvis en formel φ opfylder en af de tre ækvivalente betingelser i Lemma 5.4, da siges φ at være sand for fortolkningen $\mathcal{E}$ og dette noteres $\mathcal{E} \models \varphi$.*

5.1 Soundness

I dette afsnit vil vi vise, at vores teori er veldefineret forstået på den måde, at hvis en mængde S af sekventer er sande for en fortolkning $\mathcal{E}$ (i.e. en topos), så er hele teorien genereret af S sand i denne fortolkning. Eller sagt på en anden måde: Hvis man kan bevise en term syntaktisk, så gælder den også semantisk, dvs. i enhver fortolkning.

Definition 5.6. *Lad S være en mængde af sekventer. Teorien genereret af S, $Cn(S)$ er defineret ved*

$$Cn(S) = \cap\{T | T \text{ er en teori og } S \subseteq T\}$$

Sætning 5.7 (Soundness). *Antag, at $T = Cn(S)$ og at alle sekventer i S er sande for en fortolkning i toposen $\mathcal{E}$. Da er alle sekventer i T sande for denne fortolkning.*

Bevis: Sætningen bevises ved strukturel induktion over reglerne i en teori, dvs. for hver regel antages det, at præmissen er sand for fortolkningen og det vises, at så er også konklusionen sand for fortolkningen.

ax1 $[\![T]\!] \leq [\![T]\!]$ i $\mathrm{Hom}([\![\emptyset]\!], \Omega) = \mathrm{Hom}(1, \Omega)$, da $\leq$ er en ordensrelation.

ax2 $\top \vdash_x x = x$, hvor x har type A. Formlen $x = x$ fortolkes således at $\ker[\![x = x]\!] = eg(id_{[\![A]\!]}, id_{[\![A]\!]})$, som er det maksimale delobjekt af $[\![A]\!]$ (den universelle egenskab for egalisatorer). Da $\pi_{x=x} = id_{[\![A]\!]}$ er $\ker[\![x \hat{=} x]\!]$ det maksimale delobjekt og resultatet følger af Lemma 5.4.

ax3 Klart, da $eg(f, g) = eg(g, f)$ for alle morfier f, g.

ax4 Se [vO99] p. 37.

ax5 Følger af, at $\leq_\sigma$ er en ordensrelation.

s1 Antag, at $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket$ og $\sigma \subseteq \tau$. Lad $\rho : \llbracket \tau \rrbracket \longrightarrow \llbracket \sigma \rrbracket$ være projektionen, ρ^* er ordensbevarende, så

$$\rho^*(\pi_\psi^*(\ker\llbracket \psi \rrbracket)) \leq \rho^*(\pi_\varphi^*(\ker\llbracket \varphi \rrbracket)) \text{ i } \mathrm{Sub}(\llbracket \tau \rrbracket)$$

dvs. $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\tau \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket$ som ønsket.

s2 Antag, at $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket$. I følge Korollar 4.2 har vi $\llbracket \psi \mathbin{\hat{\wedge}} \chi \rrbracket = \inf(\llbracket \hat{\psi} \rrbracket, \llbracket \hat{\chi} \rrbracket)$, så $\llbracket \psi \mathbin{\hat{\wedge}} \chi \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket$. At også $\llbracket \chi \mathbin{\hat{\wedge}} \psi \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket$ følger af symmetrien $\inf(f,g) = \inf(g,f)$ for alle f, g.

$\vee$1 Antag, at $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi_i} \rrbracket$, $i \in \{1,2\}$. $\llbracket \varphi_1 \mathbin{\hat{\vee}} \varphi_2 \rrbracket = \sup(\llbracket \hat{\varphi_1} \rrbracket, \llbracket \hat{\varphi_2} \rrbracket)$, så $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi_i} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \varphi_1 \mathbin{\hat{\vee}} \varphi_2 \rrbracket$.

$\vee$2 Antag, at $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \varphi \mathbin{\hat{\vee}} \chi \rrbracket, \llbracket \psi \mathbin{\hat{\wedge}} \varphi \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\mu} \rrbracket$ og $\llbracket \psi \mathbin{\hat{\wedge}} \chi \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\mu} \rrbracket$.

$\llbracket \hat{\mu} \rrbracket$ er altså en øvre grænse for $\llbracket \psi \mathbin{\hat{\wedge}} \varphi \rrbracket$ og $\llbracket \psi \mathbin{\hat{\wedge}} \chi \rrbracket$. Den mindste øvre grænse for disse er

$$\begin{aligned} & \llbracket \psi \mathbin{\hat{\wedge}} \varphi \rrbracket \vee \llbracket \psi \mathbin{\hat{\wedge}} \chi \rrbracket \\ = \; & (\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \wedge \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket) \vee (\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \wedge \llbracket \hat{\chi} \rrbracket) \\ = \; & \llbracket \hat{\psi} \rrbracket \wedge (\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket \vee \llbracket \hat{\chi} \rrbracket) \end{aligned}$$

(da $\mathrm{Hom}(\llbracket \sigma \rrbracket, \Omega)$ er en distributiv lattice). Vi har altså $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \wedge \llbracket \varphi \mathbin{\hat{\vee}} \chi \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\mu} \rrbracket$, men da $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \varphi \mathbin{\hat{\vee}} \chi \rrbracket$ er $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \wedge \llbracket \varphi \mathbin{\hat{\vee}} \chi \rrbracket = \inf(\llbracket \hat{\psi} \rrbracket, \llbracket \varphi \mathbin{\hat{\vee}} \chi \rrbracket) = \llbracket \hat{\psi} \rrbracket$ dvs. $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\mu} \rrbracket$ som ønsket.

Inden vi kan vise reglen $(\rightarrow)$ får vi brug for følgende:

Sætning 5.8. *Lad φ, χ og ψ være formler, hvis frie variable alle er indeholdt i σ. Da gælder*

$$\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \chi \mathbin{\hat{\rightarrow}} \psi \rrbracket \Leftrightarrow \llbracket \chi \mathbin{\hat{\wedge}} \varphi \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\psi} \rrbracket$$

Bevis:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\ker\llbracket \chi \hat{\rightarrow} \psi \rrbracket"] \arrow[d, dotted, "j"'] \arrow[dd, bend right] & \llbracket \sigma \rrbracket \arrow[d, "\llbracket (\chi \hat{,} \psi) \rrbracket"] \\
\ker(\rightarrow) \arrow[r, "\ker(\rightarrow)"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\rightarrow"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} \tag{19}$$

Da nederste kvadrat i diagram (19) er et fibreret produkt findes en pil $j : A \longrightarrow \ker(\rightarrow)$ så hele diagrammet kommuterer. I følge Ω-aksiomet er det ydre diagram fibreret produkt og dermed er også den øvre firkant et fibreret produkt.

$$\begin{tikzcd}
\ker\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket \arrow[d, dotted, "k"'] \arrow[dr, tail, bend left, "\ker\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket"] & & \\
A \arrow[r, "\ker\llbracket \chi \hat{\rightarrow} \psi \rrbracket"] \arrow[d, "j"] & \llbracket \sigma \rrbracket \arrow[d, "\llbracket (\chi \hat{,} \psi) \rrbracket"] & \\
\ker(\rightarrow) \arrow[r, "\ker(\rightarrow)"] & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\wedge"] \arrow[r, shift right, "\pi_1"'] & \Omega
\end{tikzcd} \tag{20}$$

Vi har $\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \chi \mathbin{\hat{\to}} \psi \rrbracket$ hvis og kun hvis $\ker(\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket) \leq \ker(\llbracket \chi \mathbin{\hat{\to}} \psi \rrbracket)$ i $\mathrm{Sub}(\llbracket \sigma \rrbracket)$ dvs. hvis og kun hvis der eksisterer en pil $k : \ker \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket \longrightarrow A$ så den øverste trekant kommuterer i diagram (20).

Hvis k findes, så faktoriserer $\llbracket (\chi \hat{,} \psi) \rrbracket \circ \ker(\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket)$ gennem $\ker(\to)$ (dvs. $\llbracket (\chi \hat{,} \psi) \rrbracket \circ \ker(\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket) = \ker(\to) \circ j \circ k$). Og omvendt, hvis $\llbracket (\chi \hat{,} \psi) \rrbracket \circ \ker(\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket)$ faktoriserer gennem $\ker(\to)$, så findes k på grund af fibreret produkt-egenskaben for kvadratet i diagram (20).

Da $\ker(\to) = eg(\wedge, \pi_1)$, så findes en faktorisering netop når

$$\begin{array}{lcll}
\pi_1 \circ \llbracket (\chi \hat{,} \psi) \rrbracket \circ \ker(\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket) & = & \wedge \circ \llbracket (\chi \hat{,} \psi) \rrbracket \circ \ker(\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket) & \text{dvs.} \\
\pi_1 \circ \langle \llbracket \hat{\chi} \rrbracket, \llbracket \hat{\psi} \rrbracket \rangle \circ \ker(\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket) & = & \llbracket \chi \mathbin{\hat{\wedge}} \psi \rrbracket \circ \ker(\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket) & \text{så i følge Sætning 4.1 a)} \\
\chi_{\ker \llbracket \hat{\chi} \rrbracket} \circ \ker \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket & = & \chi_{\ker \llbracket \hat{\chi} \rrbracket \cap \ker \llbracket \hat{\psi} \rrbracket} \circ \ker \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket &
\end{array}$$

I følge Korollar 4.6 gælder dette netop når

$$\begin{array}{l}
\ker \llbracket \hat{\chi} \rrbracket \cap \ker \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket \leq \ker \llbracket \hat{\chi} \rrbracket \text{ altså når} \\
\llbracket \chi \mathbin{\hat{\wedge}} \varphi \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\psi} \rrbracket
\end{array}$$

□

Reglen $(\to)$ følger umiddelbart af Sætning 5.8.

MP Antag, at $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \varphi \mathbin{\hat{\to}} \chi \rrbracket$ og $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket$. Af Sætning 5.8 fås $\llbracket \varphi \mathbin{\hat{\wedge}} \psi \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\chi} \rrbracket$, og da $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket$ er $\inf(\llbracket \hat{\psi} \rrbracket, \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket) = \llbracket \hat{\psi} \rrbracket$ dvs. $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\chi} \rrbracket$.

$\perp$ Ifølge definitionen af $\perp$ (Definition 1.21) har vi diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail, "I_0 = \ker(\perp)"] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} \tag{21}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\ker(\perp)"] \arrow[d, "0_A"'] & 1 \\
A \arrow[ur, "I_A"'] &
\end{tikzcd} \tag{22}$$

Da der findes netop en pil fra det initielle objekt 0 til ethvert andet objekt, er $\ker(\perp)$ det mindste element i $\mathrm{Sub}(1)$ (se diagram (22)). $\pi_\perp^*(\ker(\perp)) = \ker(\hat{\perp})$ er derfor det mindste element i $\mathrm{Sub}(\llbracket \sigma \rrbracket)$.

Hvis $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \hat{\perp}$ må $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket = \hat{\perp}$ da $\hat{\perp}$ er det mindste element i $\mathrm{Hom}(\llbracket \sigma \rrbracket, \Omega)$ (ordningen her er induceret af ordningen på $\mathrm{Sub}(\llbracket \sigma \rrbracket)$), så er $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket$ for alle formler φ med $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \sigma$.

$\wedge$ Antag, at $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi_1} \rrbracket$ og $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi_2} \rrbracket$ dvs. $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket$ er en nedre grænse for $\llbracket \hat{\varphi_1} \rrbracket$ og $\llbracket \hat{\varphi_2} \rrbracket$ og da $\llbracket \varphi_1 \mathbin{\hat{\wedge}} \varphi_2 \rrbracket$ er den største blandt de nedre grænser, er $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \varphi_1 \mathbin{\hat{\wedge}} \varphi_2 \rrbracket$.

5.1.1 Substitution

Lemma 5.9 (Substitutionslemma). *Lad φ være en term af type A, $x : X \in \mathrm{FV}(\varphi)$ og t en term af type X.*

Vi har

$$[\![\mathrm{FV}(\varphi\,[t/x])]\!] = [\![\mathrm{FV}(t)]\!] \times [\![\mathrm{FV}(\varphi \setminus \{x\})]\!]$$

Fortolkningen af $\varphi\,[t/x]$ er sammensætningen

$$[\![\mathrm{FV}(\varphi\,[t/x])]\!] \xrightarrow{id_{\mathrm{FV}(\varphi\setminus\{x\})}\times[\![t]\!]} [\![X]\!] \times [\![\mathrm{FV}(\varphi \setminus \{x\})]\!] = [\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!] \xrightarrow{[\![\varphi]\!]} [\![A]\!]$$

Bemærkning 5.10. *Når vi fortolker en mængde af frie variable $\mathrm{FV}(\varphi)$ er fortolkningen kun entydig op til faktorernes orden, i.e. hvis $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x : X, y : Y\}$ kan vi både have $[\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!] = [\![X]\!] \times [\![Y]\!]$ og $[\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!] = [\![Y]\!] \times [\![X]\!]$, imidlertid er $[\![X]\!] \times [\![Y]\!] \simeq [\![Y]\!] \times [\![X]\!]$ hvorfor flertydigheden som regel ikke giver anledning til problemer.*

Bevis: Lemmaet vises ved strukturel induktion over mængden af termer t1-t11. Vi vil dog nøjes med at vise det for nogle udvalgte tilfælde blandt t1-t11 da det allerede er langt og meget teknisk.

For t1 og t2 er resultatet umiddelbart.

t3 ($\varphi \equiv (\chi_1, \chi_2)$) Antag, at $[\![\chi_i\,[t/x]]\!]$ hvor $i = 1, 2$ er sammensætningen

$$[\![\mathrm{FV}(\chi_i\,[t/x])]\!] \xrightarrow{id_{\mathrm{FV}(\chi_I\setminus\{x\})}\times[\![t]\!]} [\![X]\!] \times [\![\mathrm{FV}(\chi_i \setminus \{x\})]\!] \xrightarrow{[\![\chi_i]\!]} \Omega$$

Det skal vises, at $[\![(\chi_1, \chi_2)\,[t/x]]\!]$ er sammensætningen

$$[\![\mathrm{FV}((\chi_1, \chi_2)\,[t/x])]\!] \xrightarrow{id_{[\![\mathrm{FV}(\chi_1,\chi_2)\setminus\{x\}]\!]}\times[\![t]\!]} [\![\mathrm{FV}(\chi_1, \chi_2)]\!] \xrightarrow{[\![\chi_1,\chi_2]\!]} \Omega$$

Vi har $[\![(\chi_1, \chi_2)\,[t/x]]\!] = [\![(\chi_1\,[t/x]\,, \chi_2\,[t/x])]\!]$ som er produktpilen $\langle[\![\chi_1\,[t/x]]\!]\pi_1, [\![\chi_2\,[t/x]]\!]\pi_2\rangle$ hvor projektionerne er

$$\begin{tikzcd}
 & {[\![\mathrm{FV}(\chi_1, \chi_2)\,[t/x]]\!]} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
{[\![\mathrm{FV}(\chi_1\,[t/x])]\!]} & & {[\![\mathrm{FV}(\chi_2\,[t/x])]\!]}
\end{tikzcd}$$

Hvis vi kan vise, at

($*$) $(id_{[\![\mathrm{FV}(\chi_1)\setminus\{x\}]\!]} \times [\![t]\!]) \circ \pi_1 = \pi_3 \circ (id_{[\![\mathrm{FV}(\chi_1,\chi_2)\setminus\{x\}]\!]})$

og tilsvarende for χ_2 er vi færdige. Her er $\pi_3 : [\![\mathrm{FV}(\chi_1, \chi_2)]\!] \longrightarrow [\![\mathrm{FV}\chi]\!]$

Men

$$[\![\mathrm{FV}(\chi_1, \chi_2) \setminus \{x\}]\!] = [\![\mathrm{FV}(\chi_1) \setminus \{x\}]\!] \times [\![\mathrm{FV}(\chi_2) \setminus \{x\}]\!]$$

og

$$id_A \circ \pi_A = \pi_A \circ id_{A\times B}, \text{ hvor } \pi_A : A \times B \longrightarrow A \text{ for alle objekter } A, B. \tag{23}$$

hvoraf ($*$) følger. Resultatet for χ_2 følger af symmetri.

t10 fås nu ved at bemærke, at $[\![\chi_1\alpha\chi_2]\!] = \alpha \circ [\![(\chi_1, \chi_2)]\!]$, hvor $\alpha \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

Vi viser nu lemmaet for tilfældet $\varphi \equiv \forall_{y:A}\chi$. Antag som før, at $\llbracket \chi\,[t/x] \rrbracket$ er

$$\llbracket \mathrm{FV}(\chi)\,[t/x] \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket \mathrm{FV}(\chi)\setminus\{x\} \rrbracket}\times \llbracket t \rrbracket} \llbracket \mathrm{FV}(\chi) \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \chi \rrbracket} \Omega$$

Antag desuden, at t kan substitueres for x i $\forall_{y:A}\chi$. Det skal vises, at (a)=(b), hvor

(a)

$$\llbracket \mathrm{FV}(\forall_{y:A}\chi\,[t/x]) \rrbracket \xrightarrow{id_{\llbracket \mathrm{FV}(\forall_{y:A}\chi)\setminus\{x\} \rrbracket}\times \llbracket t \rrbracket} \llbracket \mathrm{FV}(\forall_{y:A}\chi) \rrbracket \xrightarrow{\llbracket \forall_{y:A}\chi \rrbracket} \Omega$$

(b)

$$\llbracket \mathrm{FV}(\chi\,[t/x]) \setminus \{y\} \rrbracket \xrightarrow{\ulcorner \llbracket \chi[t/x] \rrbracket \urcorner} \Omega^{\llbracket A \rrbracket} \xrightarrow{\forall_A} \Omega$$

Da

$$(a) = \forall_A \circ \ulcorner \llbracket \chi \rrbracket \urcorner \circ (id_{\llbracket \mathrm{FV}(\chi)\setminus\{x,y\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket)$$

skal vi vise, at

$$\ulcorner \llbracket \chi\,[t/x] \rrbracket \urcorner = \ulcorner \llbracket \chi \rrbracket \urcorner \circ (id_{\llbracket \mathrm{FV}(\chi)\setminus\{x,y\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket)$$

$\ulcorner \llbracket \chi\,[t/x] \rrbracket \urcorner$ er pr. definition den entydigt bestemte pil som passer ind i det kommuterende diagram (24)

$$\begin{tikzcd}
\llbracket A \rrbracket \times \Omega^{\llbracket A \rrbracket} \arrow[dr, "ev_A"] & \\
\llbracket A \rrbracket \times \llbracket \mathrm{FV}(\chi\,[t/x]) \setminus \{y\} \rrbracket \arrow[u, "id_{\llbracket A \rrbracket}\times \ulcorner \llbracket \chi[t/x] \rrbracket \urcorner"] \arrow[r, "\llbracket \chi[t/x] \rrbracket"'] & \Omega
\end{tikzcd} \tag{24}$$

Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\llbracket A \rrbracket \times \Omega^{\llbracket A \rrbracket} \arrow[dr, bend left, "ev_A"] & \\
\llbracket A \rrbracket \times \llbracket \mathrm{FV}(\chi) \setminus \{y\} \rrbracket \arrow[u, "id_{\llbracket A \rrbracket}\times \ulcorner \llbracket \chi \rrbracket \urcorner"] \arrow[r, "\llbracket \chi \rrbracket"] & \Omega \\
\llbracket A \rrbracket \times \llbracket \mathrm{FV}(\chi\,[t/x]) \setminus \{y\} \rrbracket \arrow[u, "id_{\llbracket A \rrbracket}\times id_{\mathrm{FV}(\chi)\setminus\{x,y\}}\times \llbracket t \rrbracket"] \arrow[ur, "\llbracket \chi[t/x] \rrbracket"'] &
\end{tikzcd} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
& id_{\llbracket A \rrbracket} \times id_{\mathrm{FV}(\chi)\setminus\{x,y\}} \times \llbracket t \rrbracket \\
= \ & id_{\llbracket A \rrbracket \times \llbracket \mathrm{FV}(\chi)\setminus\{x,y\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket \\
= \ & id_{\llbracket \mathrm{FV}(\chi)\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket
\end{aligned}$$

og $\llbracket \chi \rrbracket \circ (id_{\llbracket \mathrm{FV}(\chi)\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket) = \llbracket \chi\,[t/x] \rrbracket$ pr. antagelse, hvilket viser at diagram (25) er kommutativt. Pga. entydigheden af pilen $\ulcorner \llbracket \chi\,[t/x] \rrbracket \urcorner$ i diagram (24), er $\ulcorner \llbracket \chi\,[t/x] \rrbracket \urcorner = \ulcorner \llbracket \chi \rrbracket \urcorner \circ (id_{\llbracket \mathrm{FV}(\chi)\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket)$

□

Sub1 Antag, at $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket$ så skal vi vise, (jvf. Substitutionslemmaet 5.9) at

$$\begin{aligned} &\llbracket \psi \rrbracket \circ (id_{\llbracket \mathrm{FV}(\psi)\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket) \circ \pi_{\psi[t/x]} \quad \leq_{\mathrm{FV}(t)\cup\sigma\setminus\{x\}} \\ &\llbracket \varphi \rrbracket \circ (id_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket) \circ \pi_{\varphi[t/x]} \end{aligned}$$

Men ifølge ligning (23) er dette det samme som at

$$\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \circ (id_{\llbracket \sigma\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket) \leq_{\mathrm{FV}(t)\cup\sigma\setminus\{x\}} \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket \circ (id_{\llbracket \sigma\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket)$$

Det vil sige ifølge Definition 5.1 og Lemma 5.2 er det nok at vise, at

$$(id_{\llbracket \sigma\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket)^*(\llbracket \hat{\psi} \rrbracket) \leq_{\mathrm{FV}(t)\cup\sigma\setminus\{x\}} (id_{\llbracket \sigma\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket)^*(\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket)$$

Og da $(id_{\llbracket \sigma\setminus\{x\} \rrbracket} \times \llbracket t \rrbracket)^*$ er ordensbevarende følger resultatet.

Sub2 Antag, at $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \varphi[\hat{t}/x] \rrbracket$ og $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket$. Vi ved, at $\ker\llbracket t = s \rrbracket = eg(\llbracket \tilde{s} \rrbracket, \llbracket \tilde{t} \rrbracket)$, hvor $\llbracket \tilde{s} \rrbracket$ og $\llbracket \tilde{t} \rrbracket$ er de sammensatte pile

$$\begin{tikzcd} & \llbracket \mathrm{FV}(s) \rrbracket \arrow[dr, "\llbracket s \rrbracket"] & \\ \llbracket \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket \arrow[ur, "\pi_s"] \arrow[dr, "\pi_t"'] & & \llbracket X \rrbracket \\ & \llbracket \mathrm{FV}(t) \rrbracket \arrow[ur, "\llbracket t \rrbracket"'] & \end{tikzcd}$$

Vi viser først, at $\ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket = eg(id_{\llbracket \sigma\setminus\mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{s} \rrbracket, id_{\llbracket \sigma\setminus\mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{t} \rrbracket)$. Diagrammet

$$\begin{tikzcd} \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket \arrow[r, tail] & \llbracket \sigma \rrbracket \arrow[r, shift left, "id_{\llbracket \sigma\setminus\mathrm{FV}(t=s) \rrbracket}\times\llbracket \tilde{s} \rrbracket"] \arrow[r, shift right, "id_{\llbracket \sigma\setminus\mathrm{FV}(t=s) \rrbracket}\times\llbracket \tilde{t} \rrbracket"'] & \llbracket \sigma \setminus \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket \times \llbracket X \rrbracket \end{tikzcd}$$

kommuterer, idet

$$\begin{aligned} (id_{\llbracket \sigma\setminus\mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{s} \rrbracket) \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket &= (id_{\llbracket \sigma\setminus\mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket) \times (\llbracket \tilde{s} \rrbracket \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket) \\ (id_{\llbracket \sigma\setminus\mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{t} \rrbracket) \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket &= (id_{\llbracket \sigma\setminus\mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket) \times (\llbracket \tilde{t} \rrbracket \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket) \end{aligned}$$

Vi ved, at $(\llbracket \tilde{s} \rrbracket \circ \ker\llbracket t = s \rrbracket) = (\llbracket \tilde{t} \rrbracket \circ \ker\llbracket t = s \rrbracket)$ da $\ker\llbracket t = s \rrbracket = eg(\llbracket \tilde{s} \rrbracket, \llbracket \tilde{t} \rrbracket)$ og vi har det fibrerede produkt (se Lemma 5.2):

$$\begin{tikzcd} \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & \llbracket \sigma \rrbracket \arrow[d, "\pi_{t=s}"] \\ \ker\llbracket t = s \rrbracket \arrow[r, tail] & \llbracket \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket \end{tikzcd}$$

så

$$\begin{aligned} \llbracket \tilde{t} \rrbracket \circ \ker\llbracket t = s \rrbracket \circ f &= \llbracket \tilde{s} \rrbracket \circ \ker\llbracket t = s \rrbracket \circ f && \text{altså} \\ \llbracket \tilde{t} \rrbracket \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket \pi_{t=s} &= \llbracket \tilde{s} \rrbracket \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket \pi_{t=s} && \text{så da } \pi_{t=s} \text{ ifølge Lemma 1.20 er epi} \\ \llbracket \tilde{t} \rrbracket \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket &= \llbracket \tilde{s} \rrbracket \circ \ker\llbracket t \mathrel{\hat{=}} s \rrbracket && \end{aligned}$$

Lad $h : H \longrightarrow \llbracket \sigma \rrbracket$ være en pil, som opfylder $(id_{\llbracket \sigma \setminus \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{s} \rrbracket) \circ h = (id_{\llbracket \sigma \setminus \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{t} \rrbracket) \circ h$

Jvf. (23) har vi $\llbracket \tilde{s} \rrbracket \circ \pi_{\llbracket \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} = \pi_{\llbracket X \rrbracket} \circ (id_{\llbracket \sigma \setminus \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{s} \rrbracket)$, hvor $\pi_{\llbracket X \rrbracket} : \llbracket \sigma \rrbracket \longrightarrow \llbracket X \rrbracket$ og $\pi_{\llbracket \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} : \llbracket \sigma \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket$. Dermed haves $\llbracket \tilde{s} \rrbracket \circ \pi_{\llbracket \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \circ h = \llbracket \tilde{t} \rrbracket \circ \pi_{\llbracket \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \circ h$. På grund af egalisator-egenskaben for $eg(\llbracket \tilde{s} \rrbracket, \llbracket \tilde{t} \rrbracket)$ findes en pil $\alpha : H \longrightarrow \ker\llbracket t = s \rrbracket$ således at $\ker\llbracket t = s \rrbracket \circ \alpha = \pi_{\llbracket \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \circ h$. Betragt igen ovenstående fibrerede produkt. Der findes altså en entydig pil $\beta : H \longrightarrow \ker\llbracket t \hat{=} s \rrbracket$ således at $\ker\llbracket t \hat{=} s \rrbracket \circ \beta = h$, hvilket viser, at $\ker\llbracket t \hat{=} s \rrbracket = eg(id_{\llbracket \sigma \setminus \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{s} \rrbracket, id_{\llbracket \sigma \setminus \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{t} \rrbracket)$.

Vi har altså følgende diagram

$$\begin{tikzcd} \ker\llbracket t \hat{=} s \rrbracket \arrow[r, tail] & \llbracket \sigma \rrbracket \arrow[r, shift left, "id_{\llbracket \sigma \setminus \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{s} \rrbracket"] \arrow[r, shift right, "id_{\llbracket \sigma \setminus \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket} \times \llbracket \tilde{t} \rrbracket"'] & \llbracket \sigma \setminus \mathrm{FV}(t=s) \rrbracket \times \llbracket X \rrbracket \arrow[r, "\llbracket \hat{\varphi} \rrbracket"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Dvs. ifølge (23) at

$$\llbracket \varphi\,[\hat{s}/x] \rrbracket \circ \ker\llbracket t \hat{=} s \rrbracket = \llbracket \varphi\,[\hat{t}/x] \rrbracket \circ \ker\llbracket t \hat{=} s \rrbracket$$

Da $\ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq \ker\llbracket t \hat{=} s \rrbracket$ pr. antagelse, findes $k : \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \longrightarrow \ker\llbracket t \hat{=} s \rrbracket$ så $\ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket = \ker\llbracket t \hat{=} s \rrbracket \circ k$, dvs $\llbracket \varphi\,[\hat{s}/x] \rrbracket \circ \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket = \llbracket \varphi\,[\hat{t}/x] \rrbracket \circ \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket$

Da $\ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq \ker\llbracket \varphi\,[\hat{t}/x] \rrbracket$ pr. antagelse, haves følgende kommuterende diagram:

$$\begin{tikzcd} \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \ker\llbracket \varphi\,[\hat{t}/x] \rrbracket \arrow[r, tail] \arrow[d] & \llbracket \sigma \rrbracket \arrow[d, "\llbracket \varphi[\hat{t}/x] \rrbracket"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

så $\llbracket \varphi\,[\hat{t}/x] \rrbracket \circ \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket = \top \circ I_{\ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket}$ og dermed er $\llbracket \varphi\,[\hat{s}/x] \rrbracket \circ \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket = \top \circ I_{\ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket}$. Da vi også har følgende fibrerede produkt:

$$\begin{tikzcd} \ker\llbracket \varphi\,[\hat{s}/x] \rrbracket \arrow[r, tail] \arrow[d] & \llbracket \sigma \rrbracket \arrow[d, "\llbracket \varphi[\hat{s}/x] \rrbracket"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

samt pilene $\ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket : \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \longrightarrow \llbracket \sigma \rrbracket$ og $I_{\ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket} : \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \longrightarrow 1$ som opfylder $\llbracket \varphi\,[\hat{s}/x] \rrbracket \circ \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket = \top \circ I_{\ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket}$, fås en pil $j : \ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \longrightarrow \ker\llbracket \varphi\,[\hat{s}/x] \rrbracket$, hvilket viser, at $\ker\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq \ker\llbracket \varphi\,[\hat{s}/x] \rrbracket$ og dermed $\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \varphi\,[\hat{s}/x] \rrbracket$ som ønsket.

5.1.2 Kvantorer

Alkvantoren Vi skal vise, at

$$\llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_\sigma \llbracket \hat{\varphi} \rrbracket \Leftrightarrow \llbracket \hat{\psi} \rrbracket \leq_{\sigma \setminus \{x\}} \llbracket \widehat{\forall_{x:A}\varphi} \rrbracket$$

Strategien er, at vise reglen ($\forall$) for funktoren $\forall_\pi : \mathrm{Sub}(A \times B) \longrightarrow \mathrm{Sub}(B)$ og derefter at vise sammehængen mellem denne funktor og den logiske pil $\forall_A : \Omega^{[\![A]\!]} \longrightarrow \Omega$.

Vi har de sædvanlige projektioner:

$$\begin{tikzcd}
{[\![\sigma]\!]} \arrow[r, "\pi_\psi"] \arrow[d, "\pi_x"'] & {[\![\mathrm{FV}(\psi)]\!]} \\
{[\![\sigma \setminus \{x\}]\!]} \arrow[ur, "\pi'_\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

og

$$[\![\sigma]\!] \xrightarrow{\pi_\varphi} [\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!]$$

hvor $\pi_\psi = \pi'_\psi \pi_x$ da $x \in \mathrm{FV}(\psi)$.

$$\begin{array}{rlll}
 & \pi^*_\psi(\ker[\![\psi]\!]) & \leq \pi^*_\varphi(\ker[\![\varphi]\!]) & \text{i } \mathrm{Sub}([\![\sigma]\!]) \\
\Leftrightarrow & (\pi'_\psi \pi_x)(\ker[\![\psi]\!]) & \leq \pi^*_\varphi(\ker[\![\varphi]\!]) & \\
\Leftrightarrow & \pi^*_x(\pi'_\psi(\ker[\![\psi]\!])) & \leq \pi^*_\varphi(\ker[\![\varphi]\!]) & \\
\Leftrightarrow & \pi'^*_\psi(\ker[\![\psi]\!]) & \leq \forall_{pi_x}\pi^*_\varphi(\ker[\![\varphi]\!]) & \text{da } \pi^*_x \dashv \forall_{\pi_x} \\
\Leftrightarrow & \pi'^*_\psi(\ker[\![\psi]\!]) & \leq \pi^*_{\forall_{x:A}\varphi}(\forall_{\pi'_x} \ker[\![\varphi]\!]) & \text{i } \mathrm{Sub}([\![\sigma \setminus \{x\}]\!])
\end{array}$$

Hvor den sidste bi-implikation følger af, at vi har følgende fibrerede produkt i følge Korollar 4.9.

$$\begin{tikzcd}
{[\![\sigma]\!]} \arrow[r, "\pi_\varphi"] \arrow[d, "\pi_x"'] & {[\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!]} \arrow[d, "\pi'_x"] \\
{[\![\sigma \setminus \{x\}]\!]} \arrow[r, "\pi_{\forall_{x:A}\varphi}"'] & {[\![\mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}]\!]}
\end{tikzcd}$$

Af Sætning 4.14 følger det, at

$$\forall_{\pi_x}\pi^*_\varphi = \pi^*_{\forall_{x:A}\varphi}\forall_{\pi'_x}$$

Hvis vi kan vise, at $\forall_{\pi'_x}(\ker[\![\varphi]\!]) = \ker([\![\forall_{x:A}\varphi]\!])$ er vi færdige. Vi har

$$\begin{tikzcd}
\forall_{\pi'_x}(\ker[\![\varphi]\!]) \arrow[r, tail] & {[\![\mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}]\!]} \arrow[r, shift left, "\ulcorner \chi_{\ker[\![\varphi]\!]} \urcorner = \ulcorner [\![\varphi]\!] \urcorner"] \arrow[r, shift right, "\ulcorner \top_{[\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!]} \urcorner"'] & \Omega^{[\![A]\!]}
\end{tikzcd}$$

da $\forall_{\pi'_x}(\ker[\![\varphi]\!]) = eg([\![\varphi]\!], \ulcorner \top_{[\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!]} \urcorner)$. I enhver topos har vi desuden ifølge Lemma 1.13 egalisatoren

$$\begin{tikzcd}
\ker([\![\forall_{x:A}\varphi]\!]) \arrow[r, tail] & {[\![\mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}]\!]} \arrow[r, shift left, "\top_{[\![\mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}]\!]}"] \arrow[r, shift right, "{[\![\forall_{x:A}\varphi]\!]}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Vi viser først, at $\top_{[\![\mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}]\!]} \circ \forall_{\pi'_x}(\ker[\![\varphi]\!]) = [\![\forall_{x:A}\varphi]\!] \circ \forall_{\pi'_x}(\ker[\![\varphi]\!])$ herefter fås af egalisator-egenskaben for $\ker([\![\forall_{x:A}\varphi]\!])$ en pil $\sigma : \forall_{\pi'_x}(\ker[\![\varphi]\!]) \longrightarrow \ker([\![\forall_{x:A}\varphi]\!])$.

Betragt nu de kommuterende diagrammer:

$$\begin{tikzcd}
{[\![A]\!] \times \Omega^{[\![A]\!]}} \arrow[dr, "ev_{[\![A]\!]}"] & \\
{[\![A]\!] \times [\![\mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}]\!]} \arrow[u, "id_A \times \ulcorner \top_{[\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!]} \urcorner"] \arrow[r, "\top_{[\![\mathrm{FV}(\varphi)]\!]}"'] & \Omega
\end{tikzcd} \tag{26}$$

$$\begin{tikzcd}
\llbracket A \rrbracket \times \Omega^{\llbracket A \rrbracket} \arrow[drr, "ev_{\llbracket A \rrbracket}"] & & \\
\llbracket A \rrbracket \times 1 \arrow[u, "id_{\llbracket A \rrbracket}\times \ulcorner \top_{\llbracket A \rrbracket} \urcorner"] \arrow[rr, "\top_{\llbracket A \rrbracket}\pi_{\llbracket A \rrbracket}"'] & & \Omega \\
\llbracket A \rrbracket \times \llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\} \rrbracket \arrow[u, "id_{\llbracket A \rrbracket}\times I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket}"] & &
\end{tikzcd} \tag{27}$$

Altså

$$\begin{aligned}
& \top_{\llbracket A \rrbracket}\pi_{\llbracket A \rrbracket} \circ (id_{\llbracket A \rrbracket} \times I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket}) \\
= \; & ev_{\llbracket A \rrbracket} \circ (id_{\llbracket A \rrbracket} \times \ulcorner \top_{\llbracket A \rrbracket} \urcorner) \circ (id_{\llbracket A \rrbracket} \times I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket}) \\
= \; & ev_{\llbracket A \rrbracket} \circ (id_{\llbracket A \rrbracket} \times (\ulcorner \top_{\llbracket A \rrbracket} \urcorner \circ I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket}))
\end{aligned}$$

Da der kun findes én pil $I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket}$ fra $\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket$ ind i det terminale objekt 1, er $I_{\llbracket A \rrbracket}\pi_{\llbracket A \rrbracket} \circ (id_{\llbracket A \rrbracket} \times I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket}) = I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket}$ og dermed haves

$$\top_{\llbracket A \rrbracket}\pi_{\llbracket A \rrbracket} \circ (id_{\llbracket A \rrbracket} \times I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket}) = \top \circ I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket} = \top_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket}$$

så pga. entydighed af $\ulcorner \top_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket} \urcorner$ i diagram (26) er $\ulcorner \top_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket} \urcorner = \ulcorner \top_{\llbracket A \rrbracket} \urcorner \circ I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket}$. Vi har nu følgende kommuterende diagram

$$\begin{tikzcd}
\forall_{\pi'_x}(\ker\llbracket \varphi \rrbracket) \arrow[rr, tail] \arrow[d, tail] & & \llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\} \rrbracket \arrow[d, "\ulcorner \llbracket \varphi \rrbracket \urcorner"'] \arrow[dd, bend left, dotted, "\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket"] \\
\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\} \rrbracket \arrow[r] \arrow[drr, bend right, dotted, "\top_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket}"'] & 1 \arrow[r, "\ulcorner \top_{\llbracket A \rrbracket} \urcorner"] \arrow[d] & \Omega^{\llbracket A \rrbracket} \arrow[d, "\forall_{\llbracket A \rrbracket}"'] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Det vil sige $\top_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket} \circ \forall_{\pi'_x}(\ker\llbracket \varphi \rrbracket) = \llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket \circ \forall_{\pi'_x}(\ker\llbracket \varphi \rrbracket)$ som ønsket.

Vi har nu vist, at $\forall_{\pi'_x}(\ker\llbracket \varphi \rrbracket) \leq \ker\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket$. Den anden ulighed fås ved at vise, at $\ulcorner \llbracket \varphi \rrbracket \urcorner \circ \ker\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket = \ulcorner \top_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket} \urcorner \circ \ker\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket$ og derpå bruge egalisator-egenskaben for $\forall_{\pi'_x}(\ker\llbracket \varphi \rrbracket)$.

$$\begin{aligned}
\ulcorner \top_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \rrbracket} \urcorner \circ \ker\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket &= \ulcorner \top_{\llbracket A \rrbracket} \urcorner \circ (I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket} \circ \ker\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket) \\
&= \ulcorner \top_{\llbracket A \rrbracket} \urcorner \circ (I_{\llbracket \mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\} \rrbracket} \circ I_{\ker\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket} \\
&= \ulcorner \llbracket \varphi \rrbracket \urcorner \circ \ker\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket
\end{aligned}$$

hvor den sidste ulighed følger af diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\ker\llbracket \forall_{x:A}\varphi \rrbracket \arrow[r, tail] \arrow[d] & \llbracket \mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\} \rrbracket \arrow[d, "\ulcorner \llbracket \varphi \rrbracket \urcorner"] \\
1 \arrow[r, "\ulcorner \top_{\llbracket A \rrbracket} \urcorner"] \arrow[d] & \Omega^{\llbracket A \rrbracket} \arrow[d, "\forall_{\llbracket A \rrbracket}"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

□

Eksistenskvantoren På samme måde som i ovenstående bevis kan man vise de to regler $\exists 1$ og $\exists 2$ for funktoren $\exists_\pi$ samt sammenhængen mellem denne funktor og den logiske pil $\exists_A$. Et bevis for de to regler $\exists 1$ og $\exists 2$ for funktoren $\exists_\pi$ finder man i [vO99] p.37.

5.2 Fuldstændighed

Fuldstændighed er modstykket til soundness dvs. hvis en sekvent $\varphi \vdash \psi$ er sand for enhver fortolkning, da kan den bevises syntaktisk. Der gælder følgende sætning

Sætning 5.11. *$\vdash \varphi$ hvis og kun hvis $\mathcal{E} \models \varphi$ for enhver fortolkning $\mathcal{E}$.*

Udsagnet "$\mathcal{E} \models \varphi$ for enhver fortolkning $\mathcal{E}$ hvis $\vdash \varphi$" er bevist i afsnittet om Soundness. Den anden implikation kaldes *fuldstændighed* og kan vises ved at konstruere en såkaldt syntaktisk kategori ud fra teorien $C_n(\emptyset)$ (se Definition 5.6). Man konstruerer med andre ord en kategori som "svarer til" aksiomerne for IHOL. Herefter viser man, at denne kategori er en topos (dette er den svære del). Konstruktionen gør, at sandhed i denne topos medfører syntaktisk gyldighed. Denne bevis-strategi kan blandt andet ses i [vO99] 4.4 s. 39, hvor beviset er udført for regulære logikker og kategorier.

Der findes topoi, som er modeller for klassisk logik fx. kategorien **Set**. At dette ikke gælder *alle* topoi følger af ovenstående sætning, som siger, at en formel kan bevises vha. aksiomerne fra IHOL hvis og kun hvis den er sand i enhver topos. Det, der adskiller IHOL fra klassisk logik, er at *Princippet om det udelukkede tredie* (PEM[11]), altså formlen $p \vee \neg p$, ikke gælder i IHOL. Det vil altså sige, at der findes topoi hvori PEM ikke gælder. Næste afsnit giver et eksempel på en sådan topos.

6 PEM gælder ikke i enhver fortolkning

Vi vil i dette afsnit vise at toposen $\mathbf{Set}^{\to}$ ikke opfylder PEM. $\mathbf{Set}^{\to}$ er et specialtilfælde af toposen $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$, hvor $\mathcal{C}$ er kategorien $\{0 \to 1\}$. Med $\to$ betegner vi pilen $0 \to 1$. Et objekt i $\mathbf{Set}^{\to}$, altså en funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, er entydig bestemt ved at vælge to objekter (mængder) F^1 og F^0 i **Set** samt en pil (funktion) $F^{\to} : F^1 \to F^0$ i **Set**. En pil i $\mathbf{Set}^{\to}$, altså en naturlig transformation $\mu : F \Rightarrow G$, er entydig bestemt ved at vælge et par af pile (funktioner) $(\mu_1 :: \mu_0)$[12] i **Set** således at diagrammet

$$\begin{tikzcd} F^1 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "F^{\to}"'] & G^1 \arrow[d, "G^{\to}"] \\ F^0 \arrow[r, "\mu_0"'] & G^0 \end{tikzcd}$$

kommuterer.

Inden vi går i krig med PEM, skal vi se hvordan delobjektsdeterminanten og de karateristiske pile i $\mathbf{Set}^{\to}$ ser ud. Det gør vi ved at bruge det vi fundet ud af for $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ og så specialisere til tilfældet $\mathcal{C} = \{0 \to 1\}$.

Det ses let at samtlige idealer på 1 er $\mathcal{S}_1 = \{id_1, \to\}$, $\{\to\}$ og $\emptyset$ og at samtlige idealer på 0 er $\mathcal{S}_0 = \{id_0\}$ og $\emptyset$. Så vi har altså

$$\Omega^1 = \{\emptyset, \{\to\}, \mathcal{S}_1\} \quad \text{og} \quad \Omega^0 = \{\emptyset, \mathcal{S}_0\}.$$

[11] fra engelsk: Principle of the Excluded Middel.

[12] Denne notation for par er inspireret af bla. [Gru00]

For pilen $\Omega^{\rightarrow} : \Omega^1 \to \Omega^0$ får vi

$$\begin{aligned} \Omega^{\rightarrow}(\emptyset) &= \emptyset \cdot \rightarrow = \emptyset \\ \Omega^{\rightarrow}(\{\rightarrow\}) &= \{\rightarrow\} \cdot \rightarrow = \emptyset \\ \Omega^{\rightarrow}(\mathcal{S}_1) &= \mathcal{S}_1 \cdot \rightarrow = \mathcal{S}_0. \end{aligned}$$

Hvis vi kalder $\emptyset$ for 0, $\{\rightarrow\}$ for $\frac{1}{2}$ og $\mathcal{S}_1$ samt $\mathcal{S}_0$ for 1 får vi, at

$$\Omega^1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\} \quad \text{og} \quad \Omega^0 = \{0, 1\}.$$

og

$$\Omega^{\rightarrow}(0) = \Omega^{\rightarrow}(\frac{1}{2}) = 0 \quad \text{og } \Omega^{\rightarrow}(1) = 1.$$

Den naturlige transformtion $\top = (\top_1 :: \top_0)$ fra $1 = (\{*\} \to \{*\})$ til Ω er så givet ved

$$\top_1(*) = \mathcal{S}_1 \sim 1 \quad \text{og} \quad \top_0(*) = \mathcal{S}_0 \sim 1.$$

Lad nu G være en delfunktor af F; vi skal se hvordan den karateristiske pil $\chi_G = (\chi_{G,1} :: \chi_{G,0})$ for G ser ud. Givet $x \in F^1$ har vi

$$\chi_{G,1}(x) = \{f \in \mathcal{S}_1 | F(f)(x) \in G(\mathrm{dom}(f))\},$$

dvs.

$$\begin{aligned} id_1 \in \chi_{G,1}(x) \Leftrightarrow F(id_1)(x) \in G^1 \Leftrightarrow x \in G^1 \quad \text{og} \\ \rightarrow \in \chi_{G,1}(x) \Leftrightarrow F^{\rightarrow}(x) \in G^0, \end{aligned}$$

så da $id_1 \in \chi_{G,1}(x) \Leftrightarrow \chi_{G,1}(x) = \mathcal{S}_1$ får vi

$$\chi_{G,1}(x) = \begin{cases} \emptyset \sim 0, & x \notin G^1 \wedge F^{\rightarrow}(x) \notin G^0 \\ \{\rightarrow\} \sim \frac{1}{2}, & x \notin G^1 \wedge F^{\rightarrow}(x) \in G^0 \\ \mathcal{S}_1 \sim 1, & x \in G^1 \wedge F^{\rightarrow}(x) \in G^0 \end{cases} \tag{28}$$

Givet $x \in F^0$ har vi

$$\chi_{G,0}(x) = \{f \in \mathcal{S}_0 | F(f)(x) \in G(\mathrm{dom}(f))\},$$

dvs.

$$id_0 \in \chi_{G,0}(x) \Leftrightarrow F(id_0)(x) \in G^0 \Leftrightarrow x \in G^0,$$

så vi får

$$\chi_{G,0}(x) = \begin{cases} \emptyset \sim 0, & x \notin G^0 \\ \mathcal{S}_0 \sim 1, & x \in G^0 \end{cases} \tag{29}$$

Vi er nu i stand til konkret at beregne pilene $\neg$ og $\vee$ i $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$.
Negationspilen $\neg = (\neg^1 :: \neg^0)$ er karakteren for pilen $\perp = (\perp_1 :: \perp_0)$ der selv er karakteren for $((\emptyset \to \{*\}) :: (\emptyset \to \{*\}))$. Vi får altså $\perp_1(*) = \emptyset \sim 0 \in \Omega^1$ og $\perp_0(*) = \emptyset \sim 0 \in \Omega^0$. Ved at benytte (28) fås nu da $\mathrm{Im}(\perp_1) = \{0\}$ og $\mathrm{Im}(\perp_0) = \{0\}$ at

$$\neg^1 x = \chi_{\perp_1} = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \wedge x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x \neq 0 \wedge x = 0 \\ 1, & x = 0 \wedge x = 0 \end{cases}$$

Da betingelsen for $\frac{1}{2}$ aldrig er opfyldt, fås at

$$\neg^1 x = \begin{cases} 0, & x = 1 \vee x = \frac{1}{2} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Ved at anvende (29) ses at

$$\neg^0 x = \chi_{\perp_0} = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Nu til disjunktionspilen $\vee$. Pr. definition er den givet at være karakteren for billedet af pilen $\kappa = [\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle, \langle id_\Omega, \top_\Omega \rangle]$. Med oplagte betegnelser sætter vi $\kappa_{\alpha i} = \langle \top_{i\Omega^1}, id_{\Omega^i} \rangle$ og tilsvarende $\kappa_{\beta i} = \langle id_{\Omega^i}, \top_{i\Omega^1} \rangle$ for $i = 1, 0$, samt $\kappa = (\kappa_1 :: \kappa_0) = ([\kappa_{\alpha 1}, \kappa_{\beta 1}] :: [\kappa_{\alpha 0}, \kappa_{\beta 0}])$. Det verificeres nu nemt at

x	$\kappa_{\alpha 1}$	$\kappa_{\alpha 0}$	$\kappa_{\beta 1}$	$\kappa_{\beta 0}$
0	$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$
$\frac{1}{2}$	$(1,\frac{1}{2})$		$(\frac{1}{2},1)$	
1	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$

så det følger at

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\kappa_1) = \mathrm{Im}(\kappa_{\alpha 1}) \cup \mathrm{Im}(\kappa_{\beta 1}) = \{(0,1),(1,0),(\tfrac{1}{2},1),(1,\tfrac{1}{2}),(1,1)\} \\ \mathrm{Im}(\kappa_0) = \mathrm{Im}(\kappa_{\alpha 0}) \cup \mathrm{Im}(\kappa_{\beta 0}) = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}. \end{aligned}$$

Ved at anvende (28) og (29) fås at

$$\chi_{\mathrm{Im}(\kappa),1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathrm{Im}(\kappa_1) \wedge (\Omega^{\to} \times \Omega^{\to})(x) \notin \mathrm{Im}(\kappa_0) \\ \frac{1}{2}, & x \notin \mathrm{Im}(\kappa_1) \wedge (\Omega^{\to} \times \Omega^{\to})(x) \in \mathrm{Im}(\kappa_0) \\ 1, & x \in \mathrm{Im}(\kappa_1) \wedge (\Omega^{\to} \times \Omega^{\to})(x) \in \mathrm{Im}(\kappa_0) \end{cases}$$

og

$$\chi_{\mathrm{Im}(\kappa),0}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathrm{Im}(\kappa_0) \\ 1, & x \in \mathrm{Im}(\kappa_0). \end{cases}$$

Der gælder nu, da $(\Omega^{\to} \times \Omega^{\to})(\frac{1}{2}, 0) = (1, 0)$ at

$$\chi_{\mathrm{Im}(\kappa),1}(\frac{1}{2}, \neg^1 \frac{1}{2}) = \chi_{\mathrm{Im}(\kappa),1}(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}$$

mens

$$\top_1(\frac{1}{2}) = 1 \neq \frac{1}{2}.$$

Altså er $q \vee \neg q \neq \top(q)$ hvor $q : 1 \to \Omega$ er defineret ved $q^1(*) = \frac{1}{2}$ og $q^0(*) = 1$. Specielt gælder $[\![p \vee \neg p]\!] = \top$ ikke for enhver term p af typen Ω i enhver fortolkning i $\mathbf{Set}^{\to}$.

7 Konklusion

Formålet med dette projekt har været at bygge videre på den viden om sammenhængen mellem kategorier og logik, som vi opnåede i kurset *Kategoriteori*. Vi har beskæftiget os med et emne, der er afgrænset, men alligevel bredt idet det inddrager dele af både kategoriteori og logik. Det har været vigtigt for os at forstå stoffet til bunds frem for at inddrage flere aspekter af emnerne.

Vi har indført begrebet topos, og en stor del af projektet har været at vise vigtige egenskaber ved dette. Intuitionistisk højere ordens logik blev introduceret ganske kort. Den væsentligste del af projektet har været at studere fortolkningen af IHOL i en topos herunder at bevise soundness (som vi i øvrigt er kede af, at vi ikke kunne finde et godt dansk ord for!).

I forløbet har vi opnået stor indsigt i sammenhængen mellem kategoriteori og logik, og i særdeleshed set slagkraften i anvendelsen af kategoriteori. Projektet blev ret omfattende (i sider), da vi har lagt vægt på at udføre beviserne mere detaljeret end traditionen inden for kategoriteori foreskriver.

En oplagt fortsættelse af projektet ville være at gennemføre beviset for fuldstændighed. En anden mulighed kunne være at kigge på sammenhængen mellem funktorkategorien $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, hvor $\mathcal{C}$ er en preordnet mængde, og Kripke-semantik.

Ordbog

adjungeret = adjoint
adjunktion = adjunction
cartesisk afsluttet = cartesian closed
delobjekt = subobjekt
delobjektsdeterminant = subobjekt classifier
enhed = unit
egalisator = equalizer
fibreret produkt = pullback
frit produkt = pushout
grænse = limit
ko- = co-
sekvent = sequent
transponeret = tranpose

Notation

$\mathrm{dom}(f)$ er domænet for pilen f.
$\mathrm{kod}(f)$ er kodomænet for pilen f.
I_A er den entydige pil $A \longrightarrow 1$.
O_A er den entydige pil $0 \longrightarrow A$.
T_A er den sammensatte pil $TI_A : A \longrightarrow 1 \longrightarrow \Omega$.
id_A er identitetspilen på A.
$eg(f, g)$ er egalisatoren for f og g.
Hvis $f : C \times A \longrightarrow B$ så er $\ulcorner f \urcorner : C \longrightarrow B^A$ den eksponentielt transponerede.
$FV(\varphi)$ betegner mængden af fri variable i termen φ.
Hvis $FV(\varphi) \subseteq \sigma$, så er π_φ projektionen $[\![\, \sigma \,]\!] \longrightarrow [\![\, FV(\varphi) \,]\!]$.
Hvis φ og t er termer og x en variabel af samme type som t, så er $\varphi\,[t/x]$ termen φ, hvor alle forekomster af x er erstattet af termen t.
$\pi_{A_i} : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_i \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_i$ er projektionen fra et produkt af objekter (heriblandt A_i) ned på objektet A_i.
$g \times f$ betegner produktpilenpilen $\langle g\pi_{\mathrm{dom}(g)}, f\pi_{\mathrm{dom}(f)} \rangle$
$[\![\, \hat{\varphi} \,]\!] = [\![\, \varphi \,]\!]\pi_\varphi$

Litteratur

[Gol79] Robert Goldblatt. *Topoi, The Categorial Analysis of Logic*. North-Holland Publishing Company, 1979.

[Gru00] Klaus Grue. *Mathematics and Computation*. DIKU (forelæsningsnoter), 2000.

[Lan92] Ieke Moerdijk & Saunders Mac Lane. *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag, 1992.

[Lan98] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, second edition, 1998.

[Sch77] Dana I. Schlomiuk. *Logique des topos*. Les presses de l'Université de Montréal, 1977.

[Sco86] J. Lambek & P.J. Scott. *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge University Press, 1986.

[vO99] Jaap van Oosten. *Category Theory in Computer Science*. BRICS, Aarhus University, 1999.