THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE NICE - SOPHIA - ANTIPOLIS

pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

par

François LAUZE

SUR LA RESOLUTION MINIMALE DES IDEAUX D'ARRANGEMENTS DE POINTS GENERIQUES DANS LES ESPACES PROJECTIFS

soutenue le 28 septembre 1994, devant le Jury composé de

MM.	André HIRSCHOWITZ	Président du Jury, Directeur de thèse
	Carlos SIMPSON	Rapporteur
	Georges ELENCWAJG	Membre
	James ALEXANDER	Membre
	Gang XIAO	Membre
	Charles WALTER	Membre

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la résolution minimale des idéaux d'arrangement de points en position générale dans les espaces projectifs. Carlos Simpson et André Hirschowitz réduisent le problème à un calcul de rang maximal (c'est à dire surjectivité ou injectivité) pour les morphismes de restriction

$$H^0(\mathbf{P}^n, \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)) \to \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)|_{Z_s}$$

où $Z_1, \ldots, Z_s$ sont des points de $\mathbf{P}^n$. Ils montrent ensuite que pour un grand nombre de points ou de façon équivalente pour un degré ℓ suffisamment grand, on a la propriété de rang maximal. Ils déduisent cette propriété , grâce à la méthode d'Horace, d'un certain nombres de situations de rang maximal modulo les dimensions 2 et 3. Dans cette thèse on étudie et prouve systématiquement le rang maximal pour ces situations en dimension 2 et 3. On donne aussi une borne inférieure du degré pour laquelle ces énoncés sont valables. Le chapitre 6 montre comment, en raffinant les procédés de Simpson et Hirschowitz, obtenir une preuve de l'énoncé déjà connu pour $T_{\mathbf{P}^3}(\ell)$. Le chapitre 7 reprend alors la méthode pour obtenir une preuve pour $T_{\mathbf{P}^4}(\ell)$.

Mots-clés : *rang maximum, méthode d'Horace, faisceaux localement libres, transformations élémentaires.*

Abstract

The goal of this work is to study the minimal resolution of ideals of union of points in general position in projective spaces. Carlos Simpson and André Hirschowitz reduce the problem to a maximal rank computation (that is surjectivity or injectivity) for the restriction morphisms

$$H^0(\mathbf{P}^n, \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)) \to \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)|_{Z_s}$$

where $Z_1, \ldots, Z_s$ are points in $\mathbf{P}^n$. They show that for a large number of points or equivalently for a degree ℓ large enough, one has the maximal rank property. They obtain this property, using la "méthode d'Horace", from a certain number of maximal rank situations assumming maximal rank property for the situations in dimension 2 and 3. In this thesis the maximal rank property for those situations in dimension 2 and 3 is proven. A lower bound for the degree for which those properties are available is given. In chapter 6 it is shown, using some refinement in the method of Simpson and Hirschowitz, how to get a proof of the already known property for $T_{\mathbf{P}^3}(\ell)$. In chapter 7, the refined method is used to get a proof for $T_{\mathbf{P}^4}(\ell)$.

Key-words :*maximal rank, méthode d'Horace, locally-free sheaves, elementary transformations.*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance au Professeur André Hirschowitz qui a accepté de diriger cette thèse dans des conditions difficiles. Ses conseils et ses encouragements m'ont permis de mener à bien ce travail. Sa disponibilité, sa patience et sa gentillesse m'ont apporté un soutien indispensable. Je l'en remercie.

Je remercie vivement le Professeur Nicole Mestrano et le Professeur Carlos Simpson d'avoir accepté la tâche ingrate d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie ce dernier d'avoir accepté d'être membre du jury.

Je remercie le Professeur Georges Elencwajg pour m'avoir appris beaucoup de mathématiques, la rigueur nécessaire à celles-ci. Je le remercie aussi d'avoir accepté d'être membre du jury.

Un grand merci au Professeur James Alexander qui m'a fait l'honneur d'être membre de ce jury.

Je remercie le Professeur Charles Walter pour sa patience et sa gentillesse durant les nombreuses discussions que nous avons eues et pour avoir accepté d'être membre de ce jury.

Merci au Professeur Gang Xiao d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Merci également aux Professeurs Michel Merle et Philippe Maisonobe pour le soutien qu'ils m'ont apportés durant cette année.

Je remercie Annie Borel, Isabelle Laurent, Heike Laurin, Jeannine Lachkar et Marie-Christine Bermond, toujours là, surtout durant les moments difficiles.

Un grand merci à Bernard Lhomme qui a toujours été disponible lors de mes errements informatiques. A propos d'informatique, je remercie aussi vivement Jean-Marc Lacroix et Pierre Aubert. Sans eux je ne serais pas arrivé au bout. Ils ont fait preuve de beaucoup de patience durant certaines longues soirées d'été !

Je remercie enfin Monsieur Jean-Paul Pradère pour le tirage de cette thèse.

til Spidsmus

Introduction

Soit k un corps algébriquement clos, et soit S $= k[x_0, \ldots, x_n]$ l'anneau de coordonnées homogènes de $\mathbf{P}^n$, l'espace projectif de dimension n sur k. Soit alors $(P_1, \ldots, P_a)$ une collection de points dans $\mathbf{P}^n$ et $I = I(P_1, \ldots, P_a)$ l'idéal homogène du sous-schéma de $\mathbf{P}^n$ réunion de ces points. On dira que I a la résolution minimale attendue si cette résolution minimale (homogène, en tant que S-module) s'écrit

$$\cdots \to R_p \to \cdots \to R_1 \to I \to 0$$

avec

$$R_p = S(-p-\ell)^{a_p} \oplus S(-p-\ell+1)^{b_p}$$

où ℓ est le plus petit entier vérifiant $a \leq h^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\ell))$ et où

- $a_p = max\{0, rg(\Omega^p_{\mathbf{P}^n})a - h^0(\mathbf{P}^n, \Omega^p_{\mathbf{P}^n}(\ell+p))\}$,
- $b_p = max\{0, h^0(\mathbf{P}^n, \Omega^{p-1}_{\mathbf{P}^n}(\ell+p-1)) - rg(\Omega^{p-1}_{\mathbf{P}^n})a\}$.

A. Hirshowitz et C. Simpson montrent dans [Hi-Si] que ce calcul de résolution peut se réduire au problème suivant : pour tout entier p compris entre 0 et n et tout entier $\ell \geq 0$, le morphisme de restriction

$$H^0(\mathbf{P}^n, \Omega^p_{\mathbf{P}^n}(\ell)) \to \bigoplus_{i=1}^{a} \Omega^p_{\mathbf{P}^n}(\ell)|_{P_i}$$

est de rang maximal, c'est à dire injective ou surjective. En utilisant la méthode dite d'Horace introduite par A. Hirschowitz, ils déduisent cet énoncé, pour ℓ suffisamment grand, d'une série d'énoncés de rang maximal qui sont donnés dans le théorème 1 de ce travail. Ils donnent alors une preuve de ce théorème modulo les dimensions 2 et 3.

Ce travail se divisera en plusieurs chapitres . Les deux premiers seront consacrés aux méthodes d'Horace et aux énoncés qui nous intéresseront par la suite. Dans le troisième on rappellera les notations introduites pour l'évaluation des sections des produits extérieurs du fibré tangent sur $\mathbf{P}^n$ et on rappellera l'énoncé du théorème central de [Hi-Si]. Les quatrième et cinquièmes chapitres seront consacrées aux preuves de ce théorème en dimension 2 et 3. Dans le sixième chapitre on raffinera la méthode pour obtenir des résultats plus précis pour $T^3_{\mathbf{P}}$ et on obtiendra une nouvelle démonstration d'un théorème prouvé par E. Ballico et A.V. Geramita dans [Ba-Ge]. La démonstration de ces derniers était incomplète, et c'est notement pour la compléter que fut introduite la méthode d'Horace vectorielle. Le septième chapitre reprendra alors la méthode pour obtenir des résultats sur $T^4_{\mathbf{P}}$.

Table des matières

Chapitre 1

Méthodes d'Horace vectorielles

Dans ce chapitre on introduit la méthode d'Horace pour les problèmes d'évaluation de sections de fibrés vectoriels en des points et des "fractions de points". Cette méthode, essentiellement basée sur les transformations élémentaires de fibrés vectoriels, fut introduite en 1984 dans une lettre d'A. Hirshowitz à R. Hartshorne pour montrer que si $P_1, \ldots, P_{28}$ sont des points en position générale dans $\mathbf{P}^3$, l'application naturelle

$$H^0(\mathbf{P}^3, \Omega_{\mathbf{P}^3}(5)) \to \Omega_{\mathbf{P}^3}(5)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus \Omega_{\mathbf{P}^3}(5)|_{P_{28}}$$

est bijective. Elle a aussi été utilisée par M. Idà dans [Id] cette fois-ci avec des droites et des points pour calculer la résolution minimale des idéaux d'arrangement de droites en position générale dans $\mathbf{P}^3$, et par O.F. Rahavandrainy dans [Ra] pour calculer des résolutions de fibrés instantons. Dans le cas des points, le formalisme a été simplifié par A. Hirshowitz et C. Simpson.

On introduit d'abord des notations qu'on utilisera partout dans la suite.

Soit X une variété projective lisse, et X' un diviseur non-singulier de X. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur X et

$$0 \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}|_{X'} \to \mathcal{F}' \to 0$$

une suite exacte stricte de faisceaux localement libres sur X'. On notera $\mathcal{E}$ le noyau du morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$; on notera que $\mathcal{E}$ est localement libre sur X et qu'on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}'(-X') \to \mathcal{E}|_{X'} \to \mathcal{F}'' \to 0.$$

On va d'abord donner un premier lemme d'Horace simple, car n'utilisant pas de quotients, et on rappelle le lemme différentiel de [Hi-Si].

1.1 Méthode simple

C'est en fait une application à peu prés triviale du lemme du serpent.

Lemme 1.1.1 *Supposons donné un morphisme bijectif d'espaces vectoriels*

$$\lambda : H^0(X', \mathcal{F}') \to L.$$

Supposons que $H^1(X,\mathcal{E})=0$. Soit $\mu : H^0(X,\mathcal{F}) \to M$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors, pour que le morphisme

$$H^0(X,\mathcal{F}) \to M \oplus L$$

soit de rang maximal, il faut et il suffit que le morphisme

$$H^0(X,\mathcal{E}) \to M$$

le soit.

Démonstration :

Puisque $H^1(X,\mathcal{E})$ est nul, on a la suite exacte

$$0 \to H^0(X,\mathcal{E}) \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X',\mathcal{F}') \to 0$$

ainsi, évidement que la suite exacte suivante

$$0 \to M \to M \oplus L \to L \to 0$$

d'où le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(X,\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X',\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M \oplus L \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On conclut alors par le lemme du serpent. □

1.2 Méthode différentielle

Il n'est pas en général possible, en spécialisant des points dans X' d'obtenir un morphisme λ bijectif, le lemme suivant permet alors de contourner le problème.

Lemme 1.2.1 *Supposons donné un morphisme surjectif d'espaces vectoriels*

$$\lambda : H^0(X',\mathcal{F}') \to L$$

et supposons qu'il existe un point $Z' \in X'$ tel que l'application

$$H^0(X',\mathcal{F}') \to L \oplus \mathcal{F}'_{Z'}$$

soit injective.

Supposons que $H^1(X,\mathcal{E})=0$. Alors il existe un quotient $\mathcal{E}_{Z'} \to D$ avec noyau contenu dans $\mathcal{F}'(-X')_{Z'}$, de dimension $dim(D) = r(\mathcal{F}) - dim(ker(\lambda))$, ayant la propriété suivante.

Soit $\mu : H^0(X,\mathcal{F}) \to M$ un morphisme d'espaces vectoriels. Pour qu'il existe $Z \in X$ tel que le morphisme

$$H^0(X,\mathcal{F}) \to M \oplus L \oplus \mathcal{F}_Z$$

soit de rang maximal, il suffit que

$$H^0(X,\mathcal{E}) \to M \oplus D$$

soit de rang maximal.

Démonstration : C'est le lemme 1 de [Hi-Si]. □

Chapitre 2

Enoncés de rang maximal et lemmes d'Horace

2.1 Enoncés de rang maximal

On rappelle ici les énoncés de rang maximal de [Hi-Si]. On garde pour les fibrés les notations précédentes.

2.1.1 Enoncés R

Enoncé $\mathbf{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c)$

Soient y, a, b, c des entiers non-négatifs. L'énoncé $\mathbf{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c)$ veut dire la chose suivante. Il existe des points $U_1, \ldots, U_a, V_1, \ldots, V_b$ dans X' tels que pour tous quotients

$$\mathcal{F}'_{U_i} \to A_i \to 0,$$

$$\mathcal{F}_{V_i} \to B_i \to 0,$$

il existe des points $W_1, \ldots, W_c \in X'$ tel que pour tous quotients

$$\mathcal{F}_{W_i} \to C_i \to 0$$

avec le noyau contenu dans $ker(\mathcal{F}_{W_i} \to \mathcal{F}'_{W_i})$, alors pour tout entier non-négatif z, il existe des points $Y_1, \ldots Y_y \in X'$ et $Z_1, \ldots, Z_z \in X$ tels que l'application

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A_1 \oplus \ldots \oplus A_a \oplus \\ & & B_1 \oplus \ldots \oplus B_b \oplus \\ & & C_1 \oplus \ldots \oplus C_c \oplus \\ & & \mathcal{F}'_{Y_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}'_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{Z_z} \end{array}$$

soit de rang maximal.

Enoncé $\mathbf{RD}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c)$

Soient y, a, b, c des entiers non-négatifs. L'énoncé $\mathbf{RD}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c)$ veut dire la chose suivante. Il existe des points $U_1, \ldots, U_a, V_1, \ldots, V_b$ dans X' tels que pour tous quotients

$$\mathcal{F}'_{U_i} \to A_i \to 0,$$

$$\mathcal{F}_{V_i} \to B_i \to 0,$$

il existe des points $W_1, \ldots, W_c \in X'$ tel que pour tous quotients

$$\gamma(Y) : \mathcal{F}_{W_i} \to C_i(Y) \to 0$$

avec le noyau contenu dans $ker(\mathcal{F}_{W_i} \to \mathcal{F}'_{W_i})$, et dépendant rationnellement des points généraux $Y_1, \ldots, Y_y \in X'$, alors pour tout entier non-négatif z, il existe des points $Y_1, \ldots Y_y \in X'$ et $Z_1, \ldots, Z_z \in X$ tels que l'application

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A_1 \oplus \ldots \oplus A_a \oplus \\ & & B_1 \oplus \ldots \oplus B_b \oplus \\ & & C_1(Y_1, \ldots, Y_y) \oplus \ldots \oplus C_c(Y_1, \ldots, Y_y) \oplus \\ & & \mathcal{F}'_{Y_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}'_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{Z_z} \end{array}$$

soit de rang maximal.

On notera ici que ce ne sont que les quotients C_i qui dépendent des points Y_j.

Enoncé $\mathbf{R}(\mathcal{F}; a)$

Supposons que $\mathcal{F}$ est localement libre sur X et que a est un entier non-négatif. L'énoncé $\mathbf{R}(\mathcal{F}; a)$ veut dire qu'il existe des points $U_1, \ldots, U_a \in X$ tels que pour tous quotients

$$\mathcal{F}_{U_i} \to A_i \to 0,$$

et pour tout entier non-négatif z, il existe des points $Z_1, \ldots, Z_z \in X$ tels que l'application

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A_1 \oplus \ldots \oplus A_a \oplus \\ & & \mathcal{F}_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{Z_z} \end{array}$$

soit de rang maximal.

Remarque : L'énoncé $\mathbf{R}(\mathcal{F}; a)$ est une conséquence du théorème de semi-continuité de la cohomologie (cf [Ha], chap. III, théorème 12.8) et de l'énoncé $\mathbf{R}(\mathcal{F}, 0, 0; 0, a, 0)$. Dans ce dernier, les points U_i sont exigés dans X', ce qui fournit un résultat plus fort que si on les accepte quelconques dans X .

2.1.2 Enoncé $\mathbf{M}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, y; a, b)$

Soit

$$\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

une suite exacte stricte de faisceaux localement libres sur X.

Soient y, a, b des entiers non-négatifs. L'énoncé $\mathbf{M}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, y; a, b)$ veut dire la chose suivante. Il existe des points $U_1, \ldots, U_a, V_1, \ldots, V_b$ dans X tels que pour tous quotients

$$\mathcal{G}_{U_i} \to A_i \to 0,$$

et

$$\mathcal{F}_{V_i} \to B_i \to 0$$

avec le noyau contenu dans $ker(\mathcal{F}_{V_i} \to \mathcal{G}_{V_i})$ et pour tout entier non-négatif z, il existe des points $Y_1, \ldots Y_y, Z_1, \ldots, Z_z \in X$ tels que l'application

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A_1 \oplus \ldots \oplus A_a \oplus \\ & & B_1 \oplus \ldots \oplus B_b \oplus \\ & & \mathcal{G}_{Y_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{Z_z} \end{array}$$

soit de rang maximal.

2.2 Lemmes d'Horace

Dans cette section on rappelle les lemmes d'Horace établis dans [Hi-Si]. On s'y référera pour les démonstrations. On donne aussi un lemme permettant utilisant la méthode d'Horace simple. La notation $r(\mathcal{F})$ désignera le rang du faisceau $\mathcal{F}$. Soient comme auparavant X une variété projective lisse, et X' un diviseur non -singulier de X. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur X et

$$0 \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}|_{X'} \to \mathcal{F}' \to 0$$

une suite exacte stricte de faisceaux localement libres sur X'. On notera $\mathcal{E}$ le noyau du morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$; on observe que $\mathcal{E}$ est localement libre sur X et qu'on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}'(-X') \to \mathcal{E}|_{X'} \to \mathcal{F}'' \to 0.$$

Lemme 2.2.1 *Soient y, a, b, c des entiers non-négatifs. Supposons que $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$. Supposons que*

$$y + a + b + c + 1 \leq \frac{h^0(X', \mathcal{F}')}{r(\mathcal{F}')};$$

et que

$$\mathbf{R}(\mathcal{F}'; a + b) \quad et \quad \mathbf{RD}(\mathcal{E}, \mathcal{F}'', y'; b + c, 0, 1)$$

sont vrais dès que

$$\frac{h^0(X', \mathcal{F}')}{r(\mathcal{F}')} - y - a - b - c - 1 \leq y' \leq \frac{h^0(X', \mathcal{F}')}{r(\mathcal{F}')} - y - c.$$

Alors on a

$$\mathbf{RD}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c)$$

Soit c un un entier et V un k-espace vectoriel. On désignera par $Grass(c, V)$ la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de V de dimension c. On peut énoncer alors un lemme d'Horace éliminant les dépendances :

Lemme 2.2.2 *Soient y, a, b, c des entiers non-négatifs. Supposons que $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$. Supposons que*

$$y + a + b + c + 1 \leq \frac{h^0(X', \mathcal{F}')}{r(\mathcal{F}')};$$

que $y \geq max_{0 \leq k \leq r(\mathcal{F}')} dim(Grass(k, r(\mathcal{F}')))$; et que

$$\mathbf{R}(\mathcal{F}'; a + b) \quad et \quad \mathbf{R}(\mathcal{E}, \mathcal{F}'', y'; b + c, 0, 1)$$

sont vrais pour tout y' vérifiant

$$\frac{h^0(X', \mathcal{F}')}{r(\mathcal{F}')} - y - a - b - c - 1 \leq y' \leq \frac{h^0(X', \mathcal{F}')}{r(\mathcal{F}')} - y - c.$$

Alors on a

$$\mathbf{RD}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c)$$

Voici maintenant le lemme utilisant la méthode d'Horace simple pour prouver des énoncés de type **R**

Lemme 2.2.3 *Supposons que $r(\mathcal{F}) = 2$ et $r(\mathcal{F}') = 1$. Soient (a, b, c) des entiers non-négatifs et α_i, β_j et γ_k les dimensions des quotients A_i, B_j et C_k intervenant dans l'énoncé $\mathbf{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c)$. Soient alors $B'_j = B_j / im(\mathcal{F}''_{V_j})$, B''_j l'image de $\mathcal{F}''_{V_j}$ dans B_j, C''_k l'image de $\mathcal{F}''_{W_k}$ et β'_j, β''_j et γ''_k leur dimensions respectives. Supposons que $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$, $y + a + b + c \leq h^0(X', \mathcal{F}')$ et que les énoncés*

$$\mathbf{R}(\mathcal{F}'; 0) \quad et \quad \mathbf{R}(\mathcal{E}, \mathcal{F}'', h^0(X', \mathcal{F}') - y - \Sigma\, \alpha_i - \Sigma\, (\beta'_j - \beta''_j) - c + \Sigma\, \gamma''_k\, ; 0, 0, 0)$$

soient vrais. Alors on a

$$\mathbf{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c)$$

<u>Démonstration</u> :

Soit ζ l'entier

$$h^0(X', \mathcal{F}') - y - \Sigma\, \alpha_i - \Sigma\, \beta'_j - c$$

Remarquons que les quotients A_i (resp B'_j) intervenant sont soit nuls soit de la forme $\mathcal{F}'_{U_i}$ (resp $\mathcal{F}'_{V_j}$) et que les C_k se décomposent en $\mathcal{F}'_{W_k} \oplus C''_k$. D'après l'hypothèse $\mathbf{R}(\mathcal{F}'; 0)$ il existe alors ζ points $Z_1 \ldots Z_\zeta$ tels que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} H^0(X', \mathcal{F}') & \rightarrow & \mathcal{F}'_{U_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}'_{U_a} \oplus \\ & & \mathcal{F}'_{V_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}'_{V_b} \oplus \\ & & \mathcal{F}'_{C_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}'_{C_k} \oplus \\ & & \mathcal{F}'_{Y_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}'_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}'_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}'_{Z_\zeta} \oplus \end{array}$$

soit surjective, donc bijective en comptant les dimensions. On rentre alors dans le cadre du lemme 1.1.1. On conclut que pour tout choix de points $Z_{\zeta+1}, \ldots, Z_z$ dans X, l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A_1 \oplus \ldots A_a \oplus \\ & & B_1 \oplus \ldots B_b \oplus \\ & & C_1 \oplus \ldots C_c \oplus \\ & & \mathcal{F}'_{Y_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}'_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{Z_\zeta} \oplus \\ & & \mathcal{F}_{Z_{\zeta+1}} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{Z_z} \end{array}$$

est de rang maximal pourvu que l'application

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : H^0(X, \mathcal{E}) & \to & B''_1 \oplus \ldots B''_b \oplus \\ & & C''_1 \oplus \ldots C''_c \oplus \\ & & \mathcal{F}''_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}''_{Z_\zeta} \oplus \\ & & \mathcal{E}_{Z_{\zeta+1}} \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_{Z_z} \end{array}$$

le soit. Notons alors que les B''_j (resp C''_k) sont soit nuls soit de la forme $\mathcal{F}''_{V_j}$ (resp $\mathcal{F}''_{W_k}$). On a alors

$$\zeta + \Sigma\, \beta''_j + \Sigma\, \gamma''_k = h^0(X', \mathcal{F}') - y - \Sigma\, \alpha_i - \Sigma\, (\beta'_j - \beta''_j) - c + \Sigma\, \gamma''_k$$

et l'hypothèse $\mathbf{R}(\mathcal{E}, \mathcal{F}'', h^0(X', \mathcal{F}') - y - \Sigma\, \alpha_i - \Sigma\, (\beta'_j - \beta''_j) - c + \Sigma\, \gamma''_k\, ; 0, 0, 0)$ entraîne alors que ϵ est de rang maximum. $\square$

On va maintenant donner un lemme d'Horace pour les énoncés du type **M**. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau localement libre sur X et

$$\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

une suite exacte stricte de faisceaux localement libres sur X. On fait alors l'hypothèse suivante : il existe un diviseur $X' \subset X$ et une suite exacte

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{G}^{(1)} \to 0,$$

tel que $\mathcal{H}$ soit localement libre sur X, que $\mathcal{G}^{(1)}$ soit l'image directe d'un faisceau localement libre sur X', et que les morphismes

$$\mathcal{F} \to \mathcal{H},$$

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(1)},$$

et

$$\mathcal{H} \to \mathcal{G}^{(1)}$$

soient surjectifs. Notons $\mathcal{E}$ le noyau de $\mathcal{F} \to \mathcal{H}$, qui entre dans la suite exacte

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(1)} \to 0.$$

Notons $\mathcal{G}^{(2)}$ le noyau du morphisme

$$\mathcal{G}|_{X'} \to \mathcal{G}^{(1)}.$$

On a une surjection

$$\mathcal{E} \to \mathcal{G}^{(2)} \to 0.$$

Lemme 2.2.4 *Supposons que* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *sont comme ci-dessus, et que l'hypothèse est satisfaite (on gardera les mêmes notations). On suppose de plus que* $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$. *Soient* y, a, b *des entiers non-négatifs. Posons*

$$y_0' := \frac{h^0(\mathcal{H}) - r(\mathcal{H})\frac{h^0(\mathcal{F}) - r(\mathcal{G})y}{r(\mathcal{F})}}{r(\mathcal{G}^{(1)})}$$

Supposons que

$$\mathbf{R}(\mathcal{H}, \mathcal{G}^{(1)}, y'; 0, b, 0) \quad et \quad \mathbf{RD}(\mathcal{E}, \mathcal{G}^{(2)}, y'; 0, a+b, 1)$$

sont vrais, ainsi que l'inégalité

$$y - y' - 1 \geq max_{0 \leq k \leq r(\mathcal{G})} dim(Grass(k, r(\mathcal{G}))),$$

dès que y' *vérifie*

$$|y' - y_0'| \leq b + 1 + \frac{r(\mathcal{H})}{r(\mathcal{G}^{(2)})}(a + b + 1).$$

Alors l'énoncé $\mathbf{M}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, y; a, b)$ *est vrai.*

On va maintenant donner un lemme d'Horace utilisant l'énoncé $\mathbf{M}$:

Lemme 2.2.5 *Soit* $\mathcal{F}'$ *un quotient de* $\mathcal{F}|_{X'}$, *avec* X' *un diviseur de* X, *et soient* y, a, c *des entiers non-négatifs. Supposons que* $H^1(X, \mathcal{F}(-X'))$ *est nul. Si*

$$\mathbf{R}(\mathcal{F}(-X'), 0, 0; 0, 1, 0) \quad et \quad \mathbf{M}(\mathcal{F}|_{X'}, \mathcal{F}', y; a, c)$$

sont vrais, alors

$$\mathbf{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, 0, c)$$

est vrai.

Pour finir cette section, on donne un dernier lemme permettant de réduire les degrés des faisceaux intervenant dans les énoncés de type $\mathbf{RD}$:

Lemme 2.2.6 *Supposons que* X' *et* Y *sont deux diviseurs de* X *qui s'intersectent transversalement, et supposons que* $\mathcal{F}'$ *est un quotient de* $\mathcal{F}|_{X'}$. *Soient* y, a, b, c *des entiers non-négatifs vérifiant*

$$h^0(\mathcal{F}) - r(\mathcal{F}')(y + a) - r(\mathcal{F})(b + c) > h^0(Y; \mathcal{F}|_Y).$$

Supposons aussi que $w := h^0(Y, \mathcal{F}|_Y)/r(\mathcal{F})$ *est un entier. Si*

$$\mathbf{R}(\mathcal{F}|_Y, 0) \quad et \quad \mathbf{RD}(\mathcal{F}(-Y), \mathcal{F}'(-Y \cap X'), y; a, b, c)$$

sont vrais, alors

$$\mathbf{RD}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c)$$

est vrai.

Chapitre 3

Rappel du théorème central de [Hi-Si]

3.1 Les notations

On fait ici un court rappel, sans preuves, des notations introduites dans [Hi-Si]. On fixe un hyperplan H de $\mathbf{P}^n$ (défini sur le corps de base k) et on le notera $\mathbf{P}^{n-1}$ On pose alors

$$O_n := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}^{\oplus n},\ Q_n := T_{\mathbf{P}^n}(-1), O'_n := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}^{\oplus n+1}.$$

et on définit

$$Q_{n,k} := \bigwedge^k Q_n,\ \ O_{n,k} := \bigwedge^k O_n\ \ O'_{n,k} := \bigwedge^k O'_n .$$

Si alors on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= O'_{n,k} \\ \mathcal{G} &= Q_{n,k} \\ \mathcal{H} &= O_{n,k-1} \\ \mathcal{E} &= O_{n,k} \\ \mathcal{G}^{(1)} &= Q_{n-1,k-1} \\ \mathcal{G}^{(2)} &= Q_{n-1,k} \end{aligned}$$

on se trouve alors dans la situation de l'hypothèse précédant le lemme 2.2.5. Les $Q_{n,k}$ sont les tordus des faisceaux $\Omega^p_{\mathbf{P}^n}$:

$$Q_{n,k}(\ell) = \Omega^{n-k}_{\mathbf{P}^n}(\ell + n + 1 - k)\ \ et\ \ \Omega^p_{\mathbf{P}^n}(\ell) = Q_{n,n-p}(\ell - p - 1).$$

Posons

$$r_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right).$$

C'est le rang des fibrés $Q_{n,k}$ et $O_{n,k}$. On définit alors

$$\begin{aligned} \hat{q}_{n,k}(\ell) &:= \frac{h^0(\mathbf{P}^n, Q_{n,k}(\ell))}{r_{n,k}}\ \ \textit{si } r_{n,k} \textit{ est non nul}, \\ &:= \infty \textit{ sinon}. \end{aligned}$$

et (cf lemme 10 de [Hi-Si])

$$\begin{aligned} A_{n,k}(\ell) &:= \frac{n+1}{n}\hat{q}_{n-1,k-1}(\ell) \ \ \textit{si } r_{n-1,k-1} \textit{ est non nul,} \\ &:= \infty \textit{ sinon.} \end{aligned}$$

3.2 l'énoncé du théorème.

Théorème 1 *Soit $n \geq 2$. Il existe des constantes $C(n)$, $B(n)$ et $B'(n)$, telles que, pour ℓ suffisamment grand, et pour tout $0 \leq k \leq n$, les énoncés suivants soient vrais.*
I *On a*

$$\mathbf{RD}(O_{n,k}(\ell), Q_{n-1,k}(\ell), y; a, b, c)$$

pour $(a,b,c) = (0,0,0),\ (0,0,1),\ (1,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\ (2,0,1),\ (0,2,0),\ (0,2,1),\ (3,0,1),\ (0,3,0)$, *et tout y vérifiant*

$$B(n) \leq y \leq \hat{q}_{n-1,k}(\ell) - 5.$$

II *On a*

$$\mathbf{RD}(Q_{n,k}(\ell), Q_{n-1,k-1}(\ell), y; a, b, c)$$

pour (a,b,c) dans la même liste, et tout y vérifiant

$$0 \leq y \leq \hat{q}_{n-1,k-1}(\ell) - B(n).$$

III *On a*

$$\mathbf{R}(Q_{n,k}(\ell); a)$$

pour $a = 0, 1, 2, 3$.
IV *On a*

$$\mathbf{M}(O'_{n,k}(\ell), Q_{n,k}(\ell), y; 1, 1)$$

pour tout y vérifiant

$$B'(n) \leq y \leq A_{n,k}(\ell) - C(n).$$

A. Hirshowitz et C, Simpson donnent une démonstration de ce théorème par récurrence sur la dimension n de l'espace projectif considéré. Cette démonstration est valable pour tout $n \geq 4$. Il faut alors prouver ce théorème en dimensions 2 et 3. La démonstration en dimension 2 va se faire au cas par cas suivant les valeurs des entiers $a, betc$ de l'énoncé et des dimensions des quotients correspondants. Elle sera l'objet du chapitre suivant. La démonstration dans le cas de la dimension 3 est semblable à celle de [Hi-Si]. Seule une étape est modifiée, ce qui sera fait dans le chapitre 5.

Chapitre 4

Le problème sur $\mathbf{P}^2$

Dans ce chapitre on va donner une preuve du théorème 1dans le cas $n = 2$. On donnera, au paragraphe 6.4 une preuve des énoncés $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 0)$ et $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 1)$, pour tout entier $\ell \geq -2$. On fait, comme dans [Hi-Si], la convention que si $x > y$, l'intervalle $[x, y]$ est vide.

4.1 Enoncé du théorème 1 dans le cas n=2

Il faut montrer le théorème suivant :

Théorème 2 *Il existe des constantes $B(2)$, $B'(2)$ et $C(2)$, telles que, pour ℓ suffisamment grand, les énoncés suivants soient vrais.*
I *On a*

1. $\mathbf{RD}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [B(2), \ell - 4]$,
2. $\mathbf{RD}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [B(2), \ell - 3]$,
3. $\mathbf{RD}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), 0, y; a, b, c)$ *pour tout* $y \geq$,

et pour $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(3, 0, 1)$, $(0, 3, 0)$.
II *On a*

1. $\mathbf{RD}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), 0, y; a, b, c)$ *pour tout* $y \geq 0$,
2. $\mathbf{RD}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell - 1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [0, \ell + 1 - B(2)]$,
3. $\mathbf{RD}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell + 1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [0, \ell + 2 - B(2)]$,

et pour (a, b, c) *dans la même liste.*
III *On a*

1. $\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell); a)$
2. $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell - 1); a)$
3. $\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell + 1); a)$

pour $a = 0, 1, 2, 3$.
IV *On a*

1. $\mathbf{M}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), y; 1, 1)$ *pour tout* $y \geq B'(2)$,
2. $\mathbf{M}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell - 1), y; 1, 1)$ *pour tout* $y \in [B'(2), \frac{3}{2}(\ell + 1) - C(2)]$,

3. $\mathbf{M}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), y; 1, 1)$ *pour tout* $y \in [B'(2), \frac{3}{2}(\ell+2) - C(2)]$.

Dans ce qui suivra, on gardera les notations pour les points et les quotients tels qu'on les trouve dans les différents énoncés. Remarquons que les cas I.1, I.3, II.1, II.3, III.1 et III.3 sont vrais trivialement. Notons aussi que dans le théorème on peut remplacer **RD** par **R**.

4.2 Démonstration des assertions I.2 et II.1

On rappelle les suite exacte suivante

$$0 \to 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \to T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell) \to 0.$$

$$0 \to T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2) \to 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1) \to 0.$$

et on énonce deux corollaires triviaux du lemme 2.2.3 :

Corollaire 4.2.1 *Soit* $0 \leq y \leq \ell+1$ *un entier. Supposons que*

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell+1-y; 0, 0, 0)$$

est vrai. Alors

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y; 0, 0, 0)$$

l'est aussi

Corollaire 4.2.2 *Soit* $0 \leq y \leq \ell+2$ *un entier. Supposons que*

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1), \ell+2-y; 0, 0, 0)$$

est vrai. Alors

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y; 0, 0, 0)$$

l'est aussi

Démonstration :

Ces deux corollaires sont des instanciations du lemme 2.2.3. □

On va utiliser dans la suite la proposition suivante, qui démontre notement la partie I.2 du théorème 2 dans le cas où $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Proposition 4.2.3 *Pour* $\ell \geq 3$ *et tout* $y \in [0, \ell+2]$*, l'énoncé*

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y; 0, 0, 0)$$

est vrai.

Démonstration :

Supposons d'abord que $y \in [5, \ell{+}2]$. Dans ce cas, l'entier $\ell_0 = y - 2$ est dans $[3, \ell]$. On va se ramener au cas où $\ell = \ell_0$. Si $\ell = 3$ il n'y rien à faire, sinon, si $y < \ell + 2$, on va utiliser le lemme 2.2.6 avec comme second diviseur une autre droite D de $\mathbf{P}^2$. Les hypothèses du lemme sont alors satisfaites :

$$(\ell+1)(\ell+2) - y > 2(\ell+1) \text{ c'est à dire } \ell^2 + \ell > y$$

puisque

$$\ell^2 + \ell > \ell + 2 > y,$$

et

$$\frac{h^0(D, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}|_D)}{r(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2})} = \ell + 1,$$

c'est bien un entier et l'énoncé $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}|_D; 0)$ est trivialement vrai. On applique alors autant que nécessaire le lemme 2.2.6, et on est réduit à prouver

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell_0), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell_0+1), \ell_0+2; 0, 0, 0).$$

On sait qu'on a $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell_0{-}2); 0)$, qui est clairement équivalent à $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell_0{-}2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell_0{-}1), 0; 0, 0, 0)$. On applique alors le corollaire 4.2.2 pour conclure.

Il reste donc à prouver $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y; 0, 0, 0)$ pour $y = 0, 1, 2, 3, 4$. Le cas $y = 0$ est trivial. Considérons alors le cas où $y = 1$. On se ramène, pour plus de simplicité au cas où $\ell = 2$ en utilisant pour cela le lemme 2.2.6 autant de fois que nécessaire. Soient Z_1, Z_2 et Z_3 trois points de $\mathbf{P}^2$ en position générale. Considérons l'application

$$\sigma : H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3)|_Y \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_1} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_2}$$

elle est la composée de

$$\begin{array}{c} H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)) \\ \downarrow \\ 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_Y \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_1} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_2} \\ \downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3)|_Y \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_1} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_2} \end{array}$$

la première de ces applications est bijective, la seconde est surjective, σ est donc surjective. L'application

$$\tau : H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3)|_Y \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_1} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_2} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_3}$$

est la composée de

$$\begin{array}{c} H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)) \\ \downarrow \\ 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_1} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_2} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_3} \\ \downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3)|_Y \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_1} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_2} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)|_{Z_3} \end{array}$$

la première de ces applications est bijective, la seconde est injective, τ est donc injective, il s'en suit donc que $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3), 1; 0, 0, 0)$ est vrai.

Considérons maintenant l'énoncé $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y; 0, 0, 0)$ pour $y = 2, 4$. Puisque l'énoncé $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), 0; 0, 0, 0)$ est trivialement vrai, en applicant alors le corollaire 4.2.1 on trouve que $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1), \ell; 0, 0, 0)$ est vrai. On conclut alors par le corollaire 4.2.2 que $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), 2; 0, 0, 0)$ est vrai.

En applicant alors le corollaire 4.2.1, on trouve cette fois que $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), \ell-1; 0, 0, 0)$ est vrai. En applicant le corollaire 4.2.2 on trouve que $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+2), 4; 0, 0, 0)$ est vrai. On conclut en utilisant le lemme 2.2.6 (ses hypothèses sont clairement vérifiées ici) pour réduire le degré de $\ell+1$ à ℓ.

Reste donc à montrer $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), 3; 0, 0, 0)$. On procède de la même façon que précédemment. On a vu que $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3), 1; 0, 0, 0)$ est vrai. En applicant alors successivement les corollaire 4.2.1 et 4.2.2 on trouve que $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(4), 3; 0, 0, 0)$ est vrai. On utilise alors autant de fois qu'il faut le lemme 2.2.6 pour conclure. □

La proposition suivante entraînera évidement l'assertion I.2 du théorème 2, avec $B(2) = 5$.

Proposition 4.2.4 *Pour ℓ suffisamment grand (par exemple $\ell \geq 3$), on a*

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y; a, b, c)$$

pour $(a, b, c) = (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 1), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (3, 0, 1), (0, 3, 0)$ *et tout entier* $y \in [5, \ell+2-a-b-c]$.

<u>Démonstration</u> :

On va démontrer cette proposition en examinant à peu prés cas par cas les différentes valeurs de (a, b, c).

Le cas $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ a été traité dans la proposition précédente. La démonstration va consister à se ramener systématiquement aux hypothèses de la proposition 4.2.3.

Les cas (a,0,1), avec a=0,1,2,3

Par hypothèse les quotients A_i intervenant dans l'énoncé sont soit nuls soit de la forme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1|U_i}$. Il suffit alors de montrer $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y'; 0, 0, 1)$ avec y' vérifiant

$$5 \leq y' \leq \ell+1$$

On distingue alors deux sous-cas, selon la dimension de C :

1. *dim* $C = 1$, $C = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_W$
2. *dim* $C = 2$, $C = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_W = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_W \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1)|_W$

Sous-cas 1 : il suffit alors de prouver $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y'; 0, 0, 0)$ avec y' vérifiant

$$5 \leq y' \leq \ell + 2$$

ce qui a été vu à la proposition précédente.
Sous-cas 2 : pour tout $\ell \geq 4$, l'énoncé $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y-2; 0, 0, 0)$ est vrai, c'est la proposition 4.2.3. Le lemme 2.2.3 nous dit que, pour que l'énoncé soit vrai, il suffit qu'on ait $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1), \ell+2-y; 0, 0, 0)$, ce qui est vrai en applicant le lemme 4.2.1, puisque y étant plus grand que 5, $\ell+2-y \leq \ell-3 < \ell$. Si $\ell = 3$, l'intervalle $[5, \ell+1]$ est vide et il n'y a rien à montrer.

Le cas (a, b, c) *=(0,1,0)*

Dans ce cas y parcourt l'intervalle $[5, \ell+1]$. On peut supposer B non nul. On va alors distinguer plusieurs sous-cas.

1. *dim* $B = 2$
2. *dim* $B = 1$ et $B = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_V$
3. *dim* $B = 1$ et $B \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_V$

Démonstration des sous-cas :

Sous-cas 1 : on peut clairement se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ avec $y \in [5, \ell+1]$.

Sous-cas 2 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ avec $y \in [5, \ell+2]$.

Sous-cas 3 : on peut supposer $\ell \geq 4$, en effet, si $\ell = 3$, l'intervalle $[5, \ell+1]$ est vide et il n'y a rien à montrer. On a $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y-3; 0, 0, 0)$. y étant plus grand que 5, $y-3$ est donc non négatif. On conclut alors en utilisant successivement le corollaire 4.2.1 et le lemme 2.2.3.

le cas (a, b, c) *=(0,1,1)*

On peut supposer que B est non nul. L'entier y parcourt alors l'intervalle $[5, \ell]$. On va alors distinguer 6 sous-cas :

1. *dim* $B = 1$, $B \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_V$ et *dim* $C = 1$, c'est à dire $C = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_W$.
2. *dim* $B = 1$, $B = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_V$ et *dim* $C = 1$.
3. *dim* $B = 1$, $B \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_V$ et *dim* $C = 2$, c'est à dire $C = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_W$.
4. *dim* $B = 1$, $B = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_V$ et *dim* $C = 2$.
5. *dim* $B = 2$, c'est à dire $B = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_V$ et *dim* $C = 1$,
6. *dim* $B = 2$ et *dim* $C = 2$,

Démonstration des sous-cas :

Sous-cas 1 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 1, 0)$, avec $y \in [6, \ell+1]$.

Sous-cas 2 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 1, 0)$, avec $y \in [7, \ell+2]$.

Sous-cas 3 : en applicant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1), \ell+3-y; 0,0,0)$$

qui est une conséquence du corrollaire 4.2.1 et de la proposition 4.2.3.

Sous-cas 4 : on peut se ramener au cas $(a,b,c)=(0,0,1)$ avec $y \in [6, \ell+1]$.

Sous-cas 5 : il est identique au précédent.

Sous-cas 6 : en applicant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1), \ell+2-y; 0,0,0)$$

qui est une conséquence du corrollaire 4.2.1 et de la proposition 4.2.3.

le cas $(a,b,c)=$*(0,2,0)*

On peut supposer que les quotients B_1 et B_2 sont non nuls. Par hypothèse $y \in [5, \ell]$, on peut donc supposer $\ell \geq 5$. On va distinguer 6 sous-cas, les autres s'obtenant en permutant B_1 et B_2 :

1. $dim\ B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_i}$ avec $i=1,2$.
2. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 1$ et $B_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_2}$.
3. $dim\ B_i = 1$, $B_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_i}$ avec $i=1,2$.
4. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$ et $dim\ B_2 = 2$, c'est à dire $B_2 = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{V_2}$.
5. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$ et $dim\ B_2 = 2$.
6. $dim\ B_i = 2$, $B_i = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{V_i}$ avec $i=1,2$.

Démonstration des sous-cas :

Sous-cas 1 : en applicant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1), \ell+4-y; 0,0,0)$$

qui est une conséquence du corrollaire 4.2.1 et de la proposition 4.2.3.

Sous-cas 2 : on peut se ramener au cas $(a,b,c)=(0,1,0)$, avec $y \in [6, \ell+1]$.

Sous-cas 3 : on peut se ramener au cas $(a,b,c)=(0,0,0)$, avec $y \in [7, \ell+2]$.

Sous-cas 4 : on peut se ramener au cas $(a,b,c)=(0,1,1)$, avec $y \in [5, \ell]$.

Sous-cas 5 : on peut se ramener au cas $(a,b,c)=(0,1,0)$, avec $y \in [6, \ell+1]$.

Sous-cas 6 : on peut se ramener au cas $(a,b,c)=(0,1,1)$, avec $y \in [5, \ell]$.

le cas $(a,b,c)=$*(0,2,1)*

On peut supposer que les quotients B_1 et B_2 sont non nuls. Par hypothèse $y \in [5, \ell-1]$, on peut donc supposer $\ell \geq 6$. On va distinguer 12 sous-cas, les autres s'obtenant en permutant B_1 et B_2 :

1. $dim\ B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 1$.
2. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 1$, $B_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_2}$ et $dim\ C = 1$.
3. $dim\ B_i = 1$, $B_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 1$.
4. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 2$ et $dim\ C = 1$.
5. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 2$ et $dim\ C = 1$.
6. $dim\ B_i = 2$, donc $B_i = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 1$.
7. $dim\ B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 2$.
8. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 1$, $B_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_2}$ et $dim\ C = 2$.
9. $dim\ B_i = 1$, $B_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 2$.
10. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 2$ et $dim\ C = 2$.
11. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 2$ et $dim\ C = 2$.
12. $dim\ B_i = 2$, donc $B_i = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 2$.

Démonstration des sous-cas :

Sous-cas 1 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 2, 0)$ avec $y \in [6, \ell]$.

Sous-cas 2 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 1, 0)$, avec $y \in [7, \ell+1]$.

Sous-cas 3 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, avec $y \in [8, \ell+2]$.

Sous-cas 4 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 1, 1)$, avec $y \in [6, \ell]$.

Sous-cas 5 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, avec $y \in [7, \ell+1]$.

Sous-cas 6 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 2, 0)$, avec $y \in [6, \ell]$.

Sous-cas 7 : en applicant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1), \ell+4-y; 0, 0, 0)$$

qui est une conséquence du corrollaire 4.2.1 et de la proposition 4.2.3.

Sous-cas 8 : il est identique au sous-cas 4.

Sous-cas 9 : il est identique au sous-cas 5.

Sous-cas 10 : en applicant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1), \ell+3-y; 0, 0, 0)$$

qui est une conséquence du corrollaire 4.2.1 et de la proposition 4.2.3.

Sous-cas 11 : il est identique au sous-cas 6.

Sous-cas 12 : en applicant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1), \ell+2-y; 0, 0, 0)$$

qui est une conséquence du corrollaire 4.2.1 et de la proposition 4.2.3.

le cas (a, b, c) *=(0,3,0)*

On peut supposer que les quotients B_1, B_2 et B_3 sont non nuls. Par hypothèse $y \in [5, \ell - 1]$, on peut donc supposer $\ell \geq 6$. On va distinguer 10 sous-cas, les autres s'obtenant en permutant les B_i :

1. *dim* $B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2, 3$
2. *dim* $B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$, *dim* $B_3 = 1$ et $B_3 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_3}$.
3. *dim* $B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_1}$, *dim* $B_j = 1$ et $B_j = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_j}$ avec $j = 2, 3$.
4. *dim* $B_i = 1$, $B_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2, 3$
5. *dim* $B_1 = 2$, *dim* $B_j = 1$ et $B_j \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_j}$ avec $j = 2, 3$.
6. *dim* $B_1 = 2$, *dim* $B_2 = 1$, $B_2 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_2}$ et *dim* $B_3 = 1$, $B_j \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_3}$.
7. *dim* $B_1 = 2$, *dim* $B_j = 1$ et $B_j = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_j}$ avec $j = 2, 3$.
8. *dim* $B_i = 2$, avec $i = 1, 2$ et *dim* $B_3 = 1$ et $B_3 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_3}$.
9. *dim* $B_i = 2$, avec $i = 1, 2$ et *dim* $B_3 = 1$, $B_3 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell + 1)|_{V_3}$.
10. *dim* $B_i = 2$, avec $i = 1, 2, 3$

Démonstration des sous-cas :

Sous-cas 1 : en applicant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell - 2), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell - 1), \ell + 5 - y; 0, 0, 0)$$

qui est une conséquence du corrollaire 4.2.1 et de la proposition 4.2.3 (puisque y est plus grand que 5, $\ell + 5 - y$ est non négatif).

Sous-cas 2 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 2, 0)$ avec $y \in [6, \ell]$.

Sous-cas 3 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ avec $y \in [7, \ell + 1]$.

Sous-cas 4 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ avec $y \in [8, \ell + 2]$.

Sous-cas 5 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 2, 1)$ avec $y \in [5, \ell - 1]$.

Sous-cas 6 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ avec $y \in [6, \ell]$.

Sous-cas 7 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ avec $y \in [7, \ell + 1]$.

Sous-cas 8 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 2, 1)$ avec $y \in [5, \ell - 1]$.

Sous-cas 9 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 2, 0)$ avec $y \in [6, \ell]$.

Sous-cas 10 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 2, 1)$ avec $y \in [5, \ell - 1]$.

Ceci termine donc la preuve de la proposition et par suite celle de l'assertion I.2 du théorème 2. □

On va maintenant démontrer l'assertion II.2 du théorème 2, en procédant de même cas par cas. On va encore chercher à se ramener aux hypothèses de la proposition 4.2.3. La constante $B(2)$ sera celle obtenue dans la proposition précédente, c'est à dire $B(2) = 5$. On supposera aussi $\ell \geq 7$. Il faut donc montrer qu'on a

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell - 1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y; a, b, c)$$

pour tout entier y vérifiant

$$0 \leq y \leq \ell - 4$$

et (a, b, c) dans la liste précédemment citée.

le cas $(a, b, c) =$*(0,0,0)*

En applicant le corollaire 4.2.1 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell+1-y; 0, 0, 0)$$

et puisque $y \in [0, \ell-4]$, $\ell+1-y \in [5, \ell+1] \subset [0, \ell+2]$ et l'énoncé est donc une conséquence de la proposition 4.2.3.

les cas (a,0,1) avec a = 0,1,2,3

On peut supposer que les quotients A_i intervenant dans l'énoncé sont non nuls. On va distinguer deux sous-cas, selon la dimension de C :

1. $dim\ C = 1$ donc $C = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_W$,
2. $dim\ C = 2$ donc $C = T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)|_W = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_W \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_W$.

<u>Démonstration des sous-cas :</u>

Sous-cas 1 : en utilisant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell-y-a; 0, 0, 0)$$

et puisque $y \in [0, \ell-4]$, $\ell-y-a \in [5-a, \ell-a] \subset [2, \ell]$ puisque $a \leq 3$. on conclut alors par la proposition 4.2.3.

Sous-cas 2 : en utilisant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell+1-y-a; 0, 0, 0)$$

et puisque $y \in [0, \ell-4]$, $\ell+1-y-a \in [4-a, \ell+1-a] \subset [1, \ell+1]$ on conclut alors par la proposition 4.2.3.

le cas $(a, b, c) =$*(0,1,0)*

On supposera que le quotient B intervenant dans l'énoncé est non nul. On va distinguer 3 sous-cas :

1. $dim\ B = 2$
2. $dim\ B = 1$ et $B = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_V$
3. $dim\ B = 1$ et $B \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_V$

<u>Démonstration des sous-cas :</u>

Sous-cas 1 : on peut se ramener au cas $(a, b, c) = (0, 0, 1)$.

Sous-cas 2 : idem.

Sous-cas 3 : en utilisant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell+2-y; 0, 0, 0)$$

et puisque $y \in [0, \ell-4]$, $\ell+2-y \in [6, \ell+2] \subset [5, \ell+2]$. On conclut alors en utilisant la proposition 4.2.4 par exemple.

le cas (a,b,c) *=(0,1,1)*

On supposera que le quotient B intervenant dans l'énoncé est non nul. On va distinguer 6 sous-cas :

1. $dim\ B = 1$, $B \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_V$ et $dim\ C = 1$, c'est à dire $C = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_W$
2. $dim\ B = 1$, $B = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_V$ et $dim\ C = 1$
3. $dim\ B = 1$, $B \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_V$ et $dim\ C = 2$, c'est à dire $C = T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)|_W$
4. $dim\ B = 1$, $B = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_V$ et $dim\ C = 2$
5. $dim\ B = 2$, c'est à dire $B = T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)|_V$ et $dim\ C = 1$
6. $dim\ B = 2$ et $dim\ C = 2$

Démonstration des sous-cas :

Sous-cas 1 : on peut se ramener à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y+1; 0,1,0)$$

sauf pour $y = \ell - 4$. Mais, en applicant le lemme 2.2.3, cet énoncé se réduit à

$$\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), 5; 0,0,0)$$

qui est vrai par la proposition 4.2.4.

Sous-cas 2 : on peut se ramener à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y+2; 0,0,0)$$

sauf pour $y = \ell - 3$ et $y = \ell - 2$. En applicant le lemme 2.2.3 on se réduit aux énoncés

$$\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y'; 0,0,0)$$

avec $y' = 3, 4$, qui sont vrais par la proposition 4.2.3.

Sous-cas 3 : identique au sous cas 1.

Sous-cas 4 : on peut se ramener à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y+1; 0,1,0)$$

sauf pour $y = \ell - 4$. Mais, en applicant le lemme 2.2.3, cet énoncé se réduit à

$$\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), 4; 0,0,0)$$

qui est vrai par la proposition 4.2.4.

Sous-cas 5 : identique au précédent.

Sous-cas 6 : en utilisant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell+1-y; 0,0,0)$$

et puisque $y \in [0, \ell-4]$, $\ell+1-y \in [5, \ell+1]$. On conclut alors par la proposition 4.2.4.

le cas (a,b,c) =*(0,2,0)*

On peut supposer que les quotients B_1 et B_2 sont non nuls. On va distinguer 6 sous-cas, les autres s'obtenant en permutant B_1 et B_2 :

1. $dim\ B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$.
2. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 1$ et $B_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_2}$.
3. $dim\ B_i = 1$, $B_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$.
4. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$ et $dim\ B_2 = 2$, c'est à dire $B_2 = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{V_2}$.
5. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{V_1}$ et $dim\ B_2 = 2$.
6. $dim\ B_i = 2$, $B_i = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$.

Démonstration des sous-cas :

Sous-cas 1 : en applicant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell+3-y; 0, 0, 0)$$

qui est une conséquence du corrollaire 4.2.1 et de la proposition 4.2.3, sauf si y est nul. On se place donc dans cette situation.

Soient alors Δ *la droite* de $\mathbf{P}^2$ telle que $B_1 = \mathcal{O}_\Delta(\ell)|_{V_1}$ et $Z_1, \ldots, Z_\ell$ ℓ points de Δ en position générale. Posons

$$L = \mathcal{O}_\Delta(\ell)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_\Delta(\ell)|_{Z_\ell} \oplus \mathcal{O}_\Delta(\ell)|_{V_1}$$

L'application

$$H^0(\Delta, \mathcal{O}_\Delta(\ell)) \to L$$

est bijective. On rentre donc dans le cadre du lemme 1.1.1. On en conclut que pour tout ensemble de points $Z_{\ell+1}, \ldots Z_z$ l'application

$$\begin{array}{rcl} \eta : H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)) & \to & B_1 \oplus B_2 \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)|_{Z_z} \end{array}$$

est de rang maximal pourvu que l'application

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)) & \to & B_2 \oplus \\ & & \mathcal{O}_\Delta(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_\Delta(\ell+1)|_{Z_\ell} \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{\ell+1}} \oplus \ldots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_z} \end{array}$$

le soit. Pour plus de simplicité on va renommer les points intervenant dans le problème :

- $Y_i := Z_i$, pour $i = 1 \ldots \ell$
- $Z_j := Z_{\ell+j}$ pour $j > \ell$

On va alors se ramener à un problème en degré $\ell - 2$ de la même façon que dans le lemme 2.2.6 : on choisit une droite Δ' ne contenant aucun des points $Y_1, \ldots, Y_\ell$ et V_2. On a la suite exacte de faisceaux localement libres :

$$0 \to 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1) \to 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \to 2\mathcal{O}_{\Delta'}(\ell) \to 0$$

On supposera $z \geq \ell+1$. On spécialise alors $\ell+1$ points parmi les Z_i dans Δ'. L'application d'évaluation sur ces points est un isomorphisme et les sections de $2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)$ s'annullant sur ces points sont alors des sections de $2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)$. On recommence encore une fois et on est finalement ramené à montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcl}\epsilon' : H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-2)) & \rightarrow & B_2 \oplus \\ & & \mathcal{O}_\Delta(\ell-)|_{Y_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_\Delta(\ell-1)|_{Y_\ell} \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-2)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-2)|_{Z'_z}\end{array}$$

Maintenant, si on pose

$$L = \mathcal{O}_\Delta(\ell-1)|_{Y_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_\Delta(\ell-1)|_{Y_\ell}$$

l'application d'évaluation

$$H^0(\Delta, \mathcal{O}_\Delta(\ell-1)) \rightarrow L$$

est un isomorphisme. On entre alors dans les hypothèses du lemme 1.1.1 et on conclut que l'application ϵ' est de rang maximum pourvu que l'application

$$\begin{array}{rcl}\rho : H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)) & \rightarrow & B_2 \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)|_{Z'_z}\end{array}$$

le soit. Soit alors Γ *la droite* de $\mathbf{P}^2$ contenant V_2 telle que $B_2 = \mathcal{O}_\Gamma(\ell-3)|_{V_2}$. Puisque $\Gamma \simeq \mathbf{P}^1$, on reconnaît alors l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-3), 1; 0, 0, 0)$$

qui a été déjà prouvé.

Les 5 autres sous-cas on déjà étés traités dans le cas $(a, b, c) = (0, 1, 1)$.

le cas (a, b, c) *=(0,2,1)*

On peut supposer que les quotients B_1 et B_2 sont non nuls. On va distinguer 12 sous-cas, les autres s'obtenant en permutant B_1 et B_2 :

1. $dim\ B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 1$.
2. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 1$, $B_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_2}$ et $dim\ C = 1$.
3. $dim\ B_i = 1$, $B_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 1$.
4. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 2$ et $dim\ C = 1$.
5. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 2$ et $dim\ C = 1$.
6. $dim\ B_i = 2$, donc $B_i = T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 1$.
7. $dim\ B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 2$.
8. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 1$, $B_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_2}$ et $dim\ C = 2$.
9. $dim\ B_i = 1$, $B_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 2$.
10. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 2$ et $dim\ C = 2$.
11. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_1}$, $dim\ B_2 = 2$ et $dim\ C = 2$.
12. $dim\ B_i = 2$, donc $B_i = T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$ et $dim\ C = 2$.

Démonstration des sous-cas :

Sous-cas 1 : si $y \leq \ell - 5$ on peut se ramener à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y'; 0, 2, 0)$$

avec $y' \in [1, \ell-4]$, qui a déjà été traité. Lorsque $y = \ell - 4$ on utilise le lemme 2.2.3 pour se réduire à l'énoncé

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), 6; 0, 0, 0)$$

vrai, en utilisant la proposition 4.2.4.

Sous-cas 2 : si $y \leq \ell - 6$ on peut se ramener à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y'; 0, 1, 0)$$

avec $y' \in [2, \ell-4]$, qui a déjà été traité. Lorsque $y = \ell - 4$ et $y = \ell - 5$ on utilise le lemme 2.2.3 pour se réduire aux énoncés

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y'; 0, 0, 0)$$

avec $y' = 4, 5$, qui ont été démontrés dans la proposition 4.2.3.

Sous-cas 3 : si $y \leq \ell - 7$ on peut se ramener à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y'; 0, 0, 0)$$

avec $y' \in [3, \ell-4]$, qui a déjà été traité. Lorsque $y = \ell - 4, \ell - 5, \ell - 6$ on utilise le lemme 2.2.3 pour se réduire aux énoncés

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y'; 0, 0, 0)$$

avec $y' = 2, 3, 4$, qui ont été démontrés dans la proposition 4.2.3.

Sous-cas 4 : si $y \leq \ell - 5$ on peut se ramener à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y'; 0, 1, 1)$$

avec $y' \in [1, \ell-4]$, qui a déjà été traité. Lorsque $y = \ell - 4$ on utilise le lemme 2.2.3 pour se réduire à l'énoncé

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), 5; 0, 0, 0)$$

qui a été démontré dans la proposition 4.2.3.

Sous-cas 5 : si $y \leq \ell - 6$ on peut se ramener à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y'; 0, 0, 1)$$

avec $y' \in [2, \ell-4]$, qui a déjà été traité. Lorsque $y = \ell - 4$ et $y = \ell - 5$ on utilise le lemme 2.2.3 pour se réduire aux énoncés

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y'; 0, 0, 0)$$

avec $y' = 3, 4$, qui ont été démontrés dans la proposition 4.2.3.

Sous-cas 6 : si $y \leq \ell - 5$ on peut se ramener à l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y'; 0, 2, 0)$$

avec $y' \in [1, \ell-4]$, qui a déjà été traité. Lorsque $y = \ell - 4$ on utilise le lemme 2.2.3 pour se réduire à l'énoncé

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), 4; 0, 0, 0)$$

qui a été démontré dans la proposition 4.2.3.

Sous-cas 7 : supposons $y \geq 1$. Alors en utilisant le lemme 2.2.3 on se réduit à l'énoncé

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), l+3-y; 0, 0, 0)$$

qui a été démontré à la proposition 4.2.3 (puisque $y \geq 1$, $\ell + 3 - y \leq \ell + 2$). Traitons alors $y = 0$.

Soient alors Δ *la droite* de $\mathbf{P}^2$ telle que $B_1 = \mathcal{O}_\Delta(\ell)|_{V_1}$ et $Z_1, \ldots, Z_\ell$ ℓ points de Δ en position générale. Posons

$$L = \mathcal{O}_\Delta(\ell)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_\Delta(\ell)|_{Z_\ell} \oplus \mathcal{O}_\Delta(\ell)|_{V_1}$$

L'application

$$H^0(\Delta, \mathcal{O}_\Delta(\ell)) \to L$$

est bijective. On rentre donc dans le cadre du lemme 1.1.1. On en conclut que pour tout ensemble de points $Z_{\ell+1}, \ldots Z_z$ l'application

$$\begin{aligned} \eta : H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)) \quad \to \quad & B_1 \oplus B_2 \oplus C \oplus \\ & T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)|_{Z_z} \end{aligned}$$

est de rang maximal pourvu que l'application

$$\begin{aligned} \epsilon : H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)) \quad \to \quad & B_2 \oplus C \oplus \\ & \mathcal{O}_\Delta(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_\Delta(\ell+1)|_{Z_\ell} \\ & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{\ell+1}} \oplus \ldots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_z} \end{aligned}$$

De la même façon que dans le sous cas 1 du cas $(0, 2, 0)$ on réduit le degré de ℓ à $\ell - 2$ intervenant, et (en renommant les points) on est ramené à montrer que l'application

$$\begin{aligned} \epsilon' : H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-2)) \quad \to \quad & B_2 \oplus C \oplus \\ & \mathcal{O}_\Delta(\ell-1)|_{Y_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_\Delta(\ell-1)|_{Y_\ell} \\ & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-2)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-2)|_{Z'_z} \end{aligned}$$

est de rang maximum. Et toujours de la même façon, on montre que ϵ' est de rang maximum pourvu que l'application

$$\begin{aligned} \rho : H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)) \quad \to \quad & B_2 \oplus C \oplus \\ & T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)|_{Z'_z} \end{aligned}$$

le soit. Soit alors Γ *la droite* de $\mathbf{P}^2$ contenant V_2 telle que $B_2 = \mathcal{O}_\Gamma(\ell-3)|_{V_2}$. Puisque $\Gamma \simeq \mathbf{P}^1$, on reconnaît alors l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-3), 1; 0, 0, 1)$$

qui a été déjà prouvé.

Sous-cas 8 : il est identique au sous cas 4.

Sous-cas 9 : il est identique au sous cas 5.

Sous-cas 10 : en applicant le lemme 2.2.3 on se ramène à l'énoncé

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell+2-y; 0,0,0)$$

vrai, en utilisant la proposition 4.2.3, puisque $\ell+2-y \in [6, \ell+2]$.

Sous-cas 11 : il est identique au sous cas 6.

Sous-cas 12 : en applicant le lemme 2.2.3 on se ramène à l'énoncé

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell+1-y; 0,0,0)$$

vrai, en utilisant la proposition 4.2.3, puisque $\ell+1-y \in [5, \ell+1]$.

le cas (a, b, c) *=(0,3,0)*

On peut supposer que les quotients B_1, B_2 et B_3 sont non nuls. On va distinguer 10 sous-cas, les autres s'obtenant en permutant les B_i :

1. $dim\ B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2, 3$
2. $dim\ B_i = 1$, $B_i \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2$, $dim\ B_3 = 1$ et $B_3 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_3}$.
3. $dim\ B_1 = 1$, $B_1 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_1}$, $dim\ B_j = 1$ et $B_j = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_j}$ avec $j = 2, 3$.
4. $dim\ B_i = 1$, $B_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_i}$ avec $i = 1, 2, 3$
5. $dim\ B_1 = 2$, $dim\ B_j = 1$ et $B_j \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_j}$ avec $j = 2, 3$.
6. $dim\ B_1 = 2$, $dim\ B_2 = 1$, $B_2 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_2}$ et $dim\ B_3 = 1$, $B_j \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_3}$.
7. $dim\ B_1 = 2$, $dim\ B_j = 1$ et $B_j = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_j}$ avec $j = 2, 3$.
8. $dim\ B_i = 2$, avec $i = 1, 2$ et $dim\ B_3 = 1$ et $B_3 \neq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_3}$.
9. $dim\ B_i = 2$, avec $i = 1, 2$ et $dim\ B_3 = 1$, $B_3 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{V_3}$.
10. $dim\ B_i = 2$, avec $i = 1, 2, 3$

Démonstration des sous-cas :

Seul le premier sous cas n'a pas été traité, les autres l'ont étés au cas précédent. On se place donc dans le sous cas 1. Supposons d'abord $y \geq 2$. En utilisant le lemme 2.2.3 on se réduit à

$$\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), \ell+4-y; 0,0,0)$$

vrai, en utilisant la proposition 4.2.3, puisqu'on a supposé $y \geq 2$ ce qui entraîne que $\ell+4-y \in [8, \ell+2]$. La démonstration de l'énoncé pour $y = 0$ est pratiquement identique à celle de l'énoncé similaire du sous cas 1 du cas $(a, b, c) = (0, 2, 0)$, il faut simplement tenir compte du quotient supplémentaire B_3. On réduit cet énoncé à montrer que l'application

$$\begin{aligned} \rho : H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)) \quad \rightarrow \quad & B_2 \oplus B_3 \oplus \\ & T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)|_{Z'_z} \end{aligned}$$

et en considérant *la droite* Γ telle que $B_2 = \mathcal{O}_\Gamma(\ell-3)|_{V_3}$, on reconnaît alors l'énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-3), 1; 0, 1, 0)$$

qui a déjà été traité.

Reste donc à prouver l'énoncé avec $y = 1$. Considérons alors *la droite* Δ contenant V_1 et telle que $B_1 = \mathcal{O}_\Delta(\ell)|_{V_1}$. Alors Γ ne contient ni Y ni V_2 ni V_3. On pose pour la suite $D := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_Y$. En raisonnant de la même façon que précédemment, on réduit cet énoncé à prouver que l'application

$$\begin{aligned}\rho : H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)) \quad \to \quad & D \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus \\ & T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)|_{Z_1} \oplus \ldots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4)|_{Z'_z}\end{aligned}$$

et on reconnaît alors l´énoncé

$$\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell-4), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-3), 1; 0, 2, 0)$$

qui a déjà été traité.

Ce qui conclut la preuve de l'assertion II.2 du théorème 2 en prenant par exemple $\ell \geq 7$et $B(2) = 5$. Dans la suite on va en fait choisir $\ell \geq 26$. □

4.3 Démonstration des assertions III.2 et III.3

On posera $B'(2) = 27$ et $C'(2) = 27/2$.

4.3.1 Preuve de l'assertion III.2.

La démonstration va consister à vérifier les hypothèses du lemme 2.2.4.

On pose, avec les notations du lemme 2.2.4 :

- $\mathcal{F} = 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)$
- $\mathcal{G} = T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)$
- $\mathcal{H} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)$
- $\mathcal{E} = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)$
- $\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)$
- $\mathcal{G}^{(2)} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)$

Avec les constantes $B'(2)$ et $C(2)$ choisis, les entiers y de l'énoncé

$$\mathbf{M}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), y; 1, 1)$$

sont dans l'intervalle $[27, 3/2\ell - 12]$. Calculons

$$y'_0 := \frac{h^0(\mathcal{H}) - r(\mathcal{H})\frac{h^0(\mathcal{F})-r(\mathcal{G})y}{r(\mathcal{F})}}{r(\mathcal{G}^{(1)})} = \tfrac{2}{3}y.$$

Soit y' un entier vérifiant

$$|y' - \tfrac{2}{3}y| \leq 5 \ c'est\ à\ dire\ y' \in [\tfrac{2}{3}y - 5, \tfrac{2}{3}y + 5]$$

Alors y' vérifie l'inégalité

$$y - y' - 1 \geq \ max_{0\leq k\leq 2} dim\ Grass(k,2).$$

En effet ce maximum vaut 1, et il suffit alors de vérifier que

$$\tfrac{2}{3}y + 5 \leq y - 2 \ c'est\ à\ dire\ y \geq 21$$

ce qui est le cas par hypothèse. Donc, pour que

$$\mathbf{M}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), y; 1, 1)$$

soit vrai, il suffit, en applicant le lemme 2.2.4 que les énoncés

1. $\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell), y'; 0, 1, 0)$
2. $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y'; 0, 2, 1)$

le soient pour $y' \in [\frac{2}{3}y - 5, \frac{2}{3}y + 5]$. Puisque y est plus grand que 27, on a

$$y' \geq \tfrac{2}{3}(27) - 5 = 13 > 5$$

et puisque $y \leq 3/2\ell - 12$, on a

$$y' \leq \tfrac{2}{3}(3/2\ell - 12) - 5 = \ell - 13 < \ell - 1$$

Remarquons que, puisque $\ell \geq 26$, l'intervalle $[\frac{2}{3}y - 5, \frac{2}{3}y + 5]$ est non vide. Le premier énoncé est trivialement vrai pour $y' \in [0, \ell]$ ce qui est le cas ici. Le second est vrai d'après la proposition 4.2.4, pour $y' \in [5, \ell - 1]$, ce qui est le cas ici. On conclut donc que l'énoncé

$$\mathbf{M}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), y; 1, 1)$$

est vrai pour tout entier y parcourant l'intervalle $[27, 3/2\ell - 12]$. □

4.3.2 Preuve de l'assertion III.3.

La démonstration va encore une fois consister à vérifier les hypothèses du lemme 2.2.4.
On pose, avec les notations du lemme 2.2.4 :

- $\mathcal{F} = 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)$
- $\mathcal{G} = T_{\mathbf{P}^2}(\ell - 1)$
- $\mathcal{H} = 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)$
- $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)$
- $\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)$
- $\mathcal{G}^{(2)} = 0$

Avec les constantes $B'(2)$ et $C(2)$ choisis, les entiers y de l'énoncé

$$\mathbf{M}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+1), y; 1, 1)$$

sont dans l'intervalle $[27, 3/2\ell - 21/2]$. Calculons

$$y'_0 := \frac{h^0(\mathcal{H}) - r(\mathcal{H})\frac{h^0(\mathcal{F}) - r(\mathcal{G})y}{r(\mathcal{F})}}{r(\mathcal{G}^{(1)})} = \tfrac{2}{3}y.$$

Soit y' un entier vérifiant

$$|y' - \tfrac{2}{3}y| \leq 8 \; c'est \; \grave{a} \; dire \; y' \in [\tfrac{2}{3}y - 8, \tfrac{2}{3}y + 8]$$

Alors y' vérifie l'inégalité

$$y - y' - 1 \geq \; max_{0 \leq k \leq 2} dim \; Grass(k, 1).$$

En effet ce maximum est nul et il suffit alors de vérifier que

$$\tfrac{2}{3}y + 8 \leq y - 1 \; c'est \; \grave{a} \; dire \; y \geq 27$$

ce qui est le cas par hypothèse. Donc, pour que

$$\mathbf{M}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+1), y; 1, 1)$$

soit vrai, il suffit, en applicant le lemme 2.2.4 que les énoncés

1. $\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), 0, y'; 0, 2, 1)$ Le second est vrai d'après la proposition 4.2.4, pour $y' \in [5, \ell - 1]$, ce qui est le cas ici.
2. $\mathbf{R}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), y'; 0, 2, 1)$

le soient pour $y' \in [\frac{2}{3}y - 8, \frac{2}{3}y + 8]$. Puisque y est plus grand que 27, on a

$$y' \geq \tfrac{2}{3}(27) - 8 = 10 > 5$$

et puisque $y \leq 3/2\ell - 21/2$, on a

$$y' \leq \tfrac{2}{3}(3/2\ell - 21/2) - 5 = \ell - 12 < \ell + 1$$

Remarquons que, puisque $\ell \geq 26$, l'intervalle $[\frac{2}{3}y - 8, \frac{2}{3}y + 8]$ est non vide. Le premier énoncé est trivialement vrai pour tout entier y'. Le second est vrai d'après la proposition 4.2.4, pour $y' \in [5, \ell + 1]$, ce qui est le cas ici. On conclut donc que l'énoncé

$$\mathbf{M}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell - 1), y; 1, 1)$$

est vrai pour tout entier y parcourant l'intervalle $[27, 3/2\ell - 12]$.

Et ceci conclut donc la démonstration du théorème 2. $\square$

Chapitre 5

Le problème sur $\mathbf{P}^3$

Dans ce chapitre on va donner une preuve du théorème 1 dans le cas $n = 3$.

5.1 L'énoncé du théorème 1 dans le cas n=3

Il faut, en détaillant tous les cas, montrer le théorème suivant :

Théorème 3 *Il existe des constantes $B(3)$, $B'(3)$ et $C(3)$, telles que, pour ℓ suffisamment grand, les énoncés suivants soient vrais.*
I *On a*

1. $\mathbf{RD}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [B(3), (\ell+1)(\ell+2)/2 - 5]$,
2. $\mathbf{RD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [B(3), (\ell+1)(\ell+3)/2 - 5]$,
3. $\mathbf{RD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [B(3), (\ell+2)(\ell+3)/2 - 5]$,
4. $\mathbf{RD}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), 0, y; a, b, c)$ *pour tout* $y \geq B(3)$,

et pour $(a, b, c) = (0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(2,0,1)$, $(0,2,0)$, $(0,2,1)$, $(3,0,1)$, $(0,3,0)$.
II *On a*

1. $\mathbf{RD}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), 0, y; a, b, c)$ *pour tout* $y \geq 0$,
2. $\mathbf{RD}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [0, (\ell+1)(\ell+3)/2 - B(3)]$,
3. $\mathbf{RD}(\Omega_{\mathbf{P}^3}(\ell+2), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [0, (\ell+1)(\ell+3)/2 - B(3)]$,
4. $\mathbf{RD}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), y; a, b, c)$ *pour tout* $y \in [0, (\ell+2)(\ell+3)/2 - B(3)]$,

et pour (a, b, c) *dans la même liste.*
III *On a*

1. $\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell); a)$
2. $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell-1); a)$
3. $\mathbf{R}(\Omega_{\mathbf{P}^3}(\ell+2); a)$
4. $\mathbf{R}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1); a)$

pour $a = 0, 1, 2, 3$.
IV *On a*

1. $\mathbf{M}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), y; 1, 1)$ *pour tout* $y \geq B'(3)$,
2. $\mathbf{M}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^3}(\ell-1), y; 1, 1)$ *pour tout* $y \in [B'(3), \frac{2}{3}(\ell+1)(\ell+2) - C(3)]$,
3. $\mathbf{M}(6\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \Omega_{\mathbf{P}^3}(\ell+2), y; 1, 1)$ *pour tout* $y \in [B'(3), \frac{2}{3}(\ell+1)(\ell+3) - C(3)]$.
4. $\mathbf{M}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), y; 1, 1)$ *pour tout* $y \in [B'(3), \frac{2}{3}(\ell+2)(\ell+3) - C(3)]$.

Les assertions I.1, I.4, II.1, II.4, III.1, III.4 et IV.1 sont trivialement vraies. Pour le reste, on va procéder de façon similaire à la preuve établie pour le cas $n \geq 4$ du théorème 1. On va pour cela encore rappeler des quelques notations et les corollaires 11, 12, 13, 14 et 15 de [Hi-Si].

Pour commencer, on notera

$$\mathbf{YRD}(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; a, b, c) resp. \mathbf{YR}(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; a, b, c)$$

l'ensemble des entiers y vérifiant

$$\mathbf{RD}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c) resp. \mathbf{R}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', y; a, b, c).$$

Par ailleurs, on adoptera la notation

$$dim(Grass)_n := max_{j,k} dim(Grass(j, r_{n,k})).$$

Corollaire 5.1.1 *Pour ℓ suffisamment grand, si*

$$\mathbf{YRD}(Q_{n,k}(\ell-1), Q_{n-1,k-1}(\ell-1); b+c, 0, 1)$$

contient un intervalle $[y_1, y_2]$, avec $y_1 + 5 \leq y_2$ alors l'intervalle

$$[\hat{q}_{n-1,k}(\ell) - y_2, \hat{q}_{n-1,k}(\ell) - y_1 - 5]$$

est dans

$$\mathbf{YRD}(O_{n,k}(\ell), Q_{n-1,k}(\ell); a, b, c).$$

Corollaire 5.1.2 *Pour ℓ suffisamment grand, si l'intervalle $[y_1, y_2]$, avec $y_1 + 5 \leq y_2$ est dans*

$$\mathbf{YRD}(O_{n,k}(\ell), Q_{n-1,k}(\ell); b+c, 0, 1)$$

alors l'intervalle $[\hat{q}_{n-1,k-1}(\ell) - y_2, \hat{q}_{n-1,k-1}(\ell) - y_1 - 5]$ est dans

$$\mathbf{YRD}(Q_{n,k}(\ell), Q_{n-1,k-1}(\ell); a, b, c).$$

Corollaire 5.1.3 *Pour ℓ suffisamment grand, si l'intervalle $[y_1, y_2]$, avec $y_1 + 10 \leq y_2$ est dans*

$$\mathbf{YRD}(O_{n,k}(\ell-1), Q_{n-1,k}(\ell-1); 1, 0, 1)$$

alors l'intervalle $[y_1 + A_{n-1,k}(\ell) + 5, min(y_2 + A_{n-1,k}(\ell) - 5, \hat{q}_{n-1,k-1}(\ell) - 5)]$ est dans

$$\mathbf{YRD}(O_{n,k}(\ell), Q_{n-1,k}(\ell); a, b, c).$$

Corollaire 5.1.4 *Pour ℓ suffisamment grand, si l'intervalle $[y_1, y_2]$, avec $y_1 + 5 \leq y_2$ est dans*

$$\mathbf{YR}(O_{n,k}(\ell), Q_{n-1,k}(\ell); b+c, 0, 1)$$

alors l'intervalle $[max(dim(Grass)_{n-1}, \hat{q}_{n-1,k-1}(\ell) - y_2), \hat{q}_{n-1,k-1}(\ell) - y_1 - 5]$ est contenu dans

$$\mathbf{YRD}(Q_{n,k}(\ell), Q_{n-1,k-1}(\ell); a, b, c).$$

Corollaire 5.1.5 *Pour ℓ suffisamment grand,*

$$\mathbf{YRD}(O_{n,k}(\ell), Q_{n-1,k}(\ell); a, b, c),$$

contient

$$\mathbf{YRD}(O_{n,k}(\ell-1), Q_{n-1,k}(\ell-1); a, b, c).$$

5.2 Preuve des assertions I.2 et I.3

Les deux premières étapes de la preuve sont identiques à celles de [Hi-Si] pour le cas $n \geq 4$, l'étape 3 sera un peu différente, et il faudra modifier l'étape 4 en conséquence.

On a, pour $k = 1, 2$, les inclusions

$$[27+A_{2,k}(\ell)+5, A_{2,k}(\ell)+A_{2,k}(\ell-1)-\frac{37}{2}] \subset \mathbf{YRD}(O_{3,k}(\ell), Q_{2,k}(\ell); 1, 0, 1). \tag{5.2.0.1}$$

On va traiter séparemment les cas $k = 1$ et $k = 2$.

5.2.1 le cas k =1

On va ici montrer que pour ℓ suffisamment grand ($\ell \geq 178$), on a l'inclusion

$$[\frac{367}{2}, \frac{(\ell+1)(\ell+3)}{2} - 5] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1); 1, 0, 1).$$

L'inclusion de (5.2.0.1) se réécrit :

$$[(3\ell+67)/2, 3\ell-17] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1); 1, 0, 1).$$

En applicant le corollaire 5.1.3 on obtient que

$$[3\ell+83/2, 9\ell/2-19] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 1, 0, 1).$$

On applique alors 19 fois le corollaire 5.1.5 et on obtient que

$$[3\ell+83/2, 9\ell/2-19] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+20), T_{\mathbf{P}^2}(\ell+19); 1, 0, 1),$$

et la première inclusion se réécrit, en considérant $\ell + 20$ au lieu de ℓ

$$[(3\ell+127)/2, 3\ell+43] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+20), T_{\mathbf{P}^2}(\ell+19); 1, 0, 1)$$

et puisque $3\ell + 43 > 3\ell + 83/2$, on a l'inclusion :

$$[(3\ell+127)/2, 9\ell/2-19] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+20), T_{\mathbf{P}^2}(\ell+19); 1, 0, 1).$$

On obtient alors, pour ℓ sufisemment grand (par exemple $\ell \geq 48$) l'inclusion

$$[(3\ell+67)/2, 9\ell/2-109] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1); 1, 0, 1).$$

En applicant à cet intervalle les corollaires 5.1.3 et 5.1.5 on obtient finalement que, pour tout entier $\ell \geq 49$, l'intervalle

$$[\frac{3\,\ell}{2} + 32, 6\,\ell - 117]$$

est contenu dans

$$\mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1); 1, 0, 1) \tag{5.2.1.1}$$

Ensuite on fait essentiellement la même chose que dans l'étape 4 de [Hi-Si]. On définit une fonction $\Phi(\ell)$ pour $\ell \geq 102$ par $\Phi(102) = 495$ et

$$\Phi(\ell) = \Phi(\ell-1) + 3(\ell+1)/2 - 5.$$

Posons alors

$$\Psi(\ell) = min(\Phi(\ell), \frac{(\ell+1)(\ell+3)}{2} - 5).$$

Alors, pour $\ell \geq 102$,

$$\mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1); 1, 0, 1),$$

contient l'intervalle $[185, \Psi(\ell)]$ (On a remplacé ℓ par 102 dans la borne inférieure de l'intervalle (5.2.1.1)). Le cas initial est évidement vrai. Il suffit de démontrer en utilisant les corollaires 5.1.3 et 5.1.5 les inégalités

$$\frac{383}{2} + 3\,\frac{\ell}{2} \leq \frac{\ell(\ell+2)}{2} - 5$$

et

$$\frac{383}{2} + 3\,\frac{\ell}{2} \leq \Phi(\ell-1).$$

La première inégalité est vraie pour tout $\ell \geq 21$, ce qui est bien le cas ici. Le calcul de $\Phi(\ell)$ donne

$$\Phi(\ell) = \frac{3\,\ell^2}{4} - \frac{11\,\ell}{4} - \frac{14055}{2}$$

et en résolvant on trouve que la dernier inégalité est vrai pour tout $\ell \geq 102$ (mais pas avant, d'où le choix de 102). Maintenant, on résout l'inéquation

$$\Phi(l) \geq \frac{(\ell+1)(\ell+3)}{2} - 5$$

et on trouve qu'elle vraie pour tout entier $\ell \geq 178$ Finalement on obtient que, dès que $\ell \geq 178$,

$$\mathbf{RD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1), y; a, b, c)$$

contient l'intervalle

$$[185, \frac{(\ell+1)(\ell+3)}{2} - 5]$$

En applicant alors les corollaires 5.1.3 et 5.1.5 on montre, de la même façon que dans la dernière étape de [Hi-Si], que pour tout entier $\ell \geq 179$, l'intervalle

$$[185, \frac{(\ell+1)(\ell+3)}{2} - 5]$$

est contenu dans

$$\mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1); a, b, c).$$

Donc, en choisissant $B(3) = 185$ on a l'assertion I.2 du théorème 3. $\square$

5.2.2 le cas k =2

Elle est presque identique à la précédente. L'inclusion (5.2.0.1) se réécrit :

$$[35+\frac{3\,\ell}{2}, 3\,\ell-14] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+1); a, b, c)$$

En applicant le corollaire 5.1.3 on obtient pour tout ℓ suffisamment grand, (par exemple $\ell \geq 26$), l'inclusion

$$[\frac{79}{2}+3\ell, \frac{9\,\ell-29}{2}] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+2); a, b, c).$$

On applique alors 17 fois le corollaire 5.1.5 et on trouve donc que

$$[\frac{79}{2}+3\ell, \frac{9\,\ell-29}{2}]$$

est inclus dans

$$\mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+18), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+19); a, b, c).$$

La première inclusion se réécrit, en considérant $\ell+18$ au lieu de ℓ

$$[62+\frac{3\,\ell}{2}, 3\,\ell+40] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+18), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+19); a, b, c)$$

et puisque $40 > 79/2$ on obtient que l'intervalle

$$[62+\frac{3\,\ell}{2}, \frac{9\,\ell-29}{2}]$$

est contenu dans

$$\mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+18), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+19); a, b, c)$$

ce qui se réécrit, pour ℓ suffisamment grand (par exemple $\ell \geq 44$),

$$[35+\frac{3\,\ell}{2}, \frac{9\,\ell-191}{2}] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+1); a, b, c).$$

On applique alors les corollaires 5.1.3 et 5.1.5 et on obtient finalement que, pour ℓ suffisamment grand (par exemple $\ell \geq 45$) :

$$[3\,\ell+\frac{83}{2}] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+1); a, b, c). \tag{5.2.2.1}$$

On procède ensuite comme auparavant. On définit une fonction $\Phi(\ell)$ pour tout $\ell \geq 95$ par $\Phi(95) = 468$ et

$$\Phi(\ell) = \Phi(\ell-1) + 3(\ell+2)/2 - 5.$$

Posons alors

$$\Psi(\ell) = min(\Phi(\ell), \frac{(\ell+2)(\ell+3)}{2} - 5).$$

Alors, pour $\ell \geq 95$,

$$\mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1); 1, 0, 1),$$

contient l'intervalle $[176, \Psi(\ell)]$ (On a remplacé ℓ par 95 dans la borne inférieure de l'intervalle (5.2.2.1)). Le cas initial est évidement vrai. Il suffit de démontrer en utilisant les corollaires 5.1.3 et 5.1.5 les inégalités

$$184 + 3\,\frac{\ell}{2} \leq \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} - 5$$

et

$$184 + \frac{361}{2} + 3\,\frac{\ell}{2} \leq \Phi(\ell-1).$$

La première inégalité est vraie pour tout $\ell \geq 20$, ce qui est bien le cas ici. Le calcul de $\Phi(\ell)$ donne

$$\Phi(\ell) = \frac{3\,\ell^2}{4} - \frac{5\,\ell}{4} - 6182$$

et en résolvant on trouve que la dernier inégalité est vrai pour tout $\ell \geq 95$ (mais pas avant, d'où le choix de 95). Maintenant, en résolvant l'inéquation

$$\Phi(\ell) \geq \frac{(\ell+2)(\ell+3)}{2} - 5$$

on trouve qu'elle et vraie pour tout $\ell \geq 166$. On en conclut finalement que pour tout entier $\ell \geq 166$ on a $\mathbf{RD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}\mathbf{P}^2(\ell+1), y; a, b, c)$

$$[176, \frac{(\ell+2)(\ell+3)}{2} - 5] \subset \mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1); 1, 0, 1).$$

En applicant alors les corollaires 5.1.3 et 5.1.5 on montre, de la même façon que dans la dernière étape de [Hi-Si], pour tout entier ℓ suffisamment grand, $\ell \geq 167$, que l'intervalle

$$[176, \frac{(\ell+2)(\ell+3)}{2} - 5]$$

est contenu dans

$$\mathbf{YRD}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1); a, b, c).$$

Donc, en choisissant $B(3) = 176$ on a l'assertion I.3 du théorème 3. Pour la suite on pendra $B(3) = 185$, puisque c'est le plus grand de ceux qu'on a trouvé. $\square$

5.3 Preuve des assertions II.2 et II.3

En applicant le corollaire 5.1.2 à partir des assertions I démontrées ci-dessus, on obtient que

$$[max(\hat{q}_{2,k-1}(\ell) - \hat{q}_{2,k}(\ell) + 5), \hat{q}_{2,k-1}(\ell) - B(3) - 5]$$

est dans

$$\mathbf{YRD}(Q_{3,k}(\ell), Q_{2,k-1}(\ell); a, b, c).$$

On va calculer ce maximum pour $k = 1, 2$. Commençons par $k = 1$. On a

$$\begin{aligned} \hat{q}_{2,0}(\ell) - \hat{q}_{2,1}(\ell) + 5 &= \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} - \frac{(\ell+1)(\ell+3)}{2} + 5 \\ &= -\frac{\ell-9}{2} \end{aligned}$$

et le maximum est évidement nul pour $\ell \geq 9$.

Pour $k = 2$, on a

$$\begin{aligned} \hat{q}_{2,1}(\ell) - \hat{q}_{2,2}(\ell) + 5 &= \frac{(\ell+1)(\ell+3)}{2} - \frac{(\ell+2)(\ell+3)}{2} + 5 \\ &= -\frac{\ell-7}{2} \end{aligned}$$

et le maximum est évidement nul pour $\ell \geq 7$. Donc, en augmentant $B(3)$ de 5, c'est à dire avec $B(3) = 190$ on a les assertions II.2 et II.3. □

La preuve des assertions IV.1, IV.2 et IV.3 est celle de [Hi-Si]

Chapitre 6

Rang maximum pour $T_{\mathbf{P}^3}$

Dans ce chapitre on va donner des résultats plus précis dans le cas de $\mathbf{P}^3$. On va donner une preuve du théorème suivant, démontré par E. Ballico et A.V. Géramita, mais ici en utilisant les méthodes de [Hi-Si].

Théorème 4 *Soit $P_1, \ldots, P_z$ une famille finie de points en position générale dans $\mathbf{P}^3$. Alors pour tout entier $\ell \geq -2$ l'application naturelle :*

$$\sigma_\ell : H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \to T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_z}$$

est de rang maximal.

Remarque 6.0.1 *Puisque $h^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) = 0$ si $\ell \leq -2$, il n'y a dans ce cas rien à prouver.*

Pour montrer le théorème. on va dans un premier paragraphe réduire le problème de rang maximum à un problème de bijection. On donnera alors dans la section suivante des énoncés et des lemmes d'Horace spécifiques au problème bijectif. On verra que les énoncés utilisés sont des raffinements des énoncés de type **R** et **M** introduits dans la seconde partie de ce travail.

6.1 Réduction du problème

Dans la suite on posera

$$\sigma_{\ell,z} : H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \to T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_z}$$

l'application naturelle.

Un premier lemme va permettre de réduire pour tout ℓ fixé, le nombre de situations à examiner à au plus deux. On posera dans la suite

$$r = r(\ell) := \left[\frac{h^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell))}{3}\right] = [\hat{q}_{3,1}(\ell+1)]$$

où $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x. On posera aussi, pour simplifier $T_n(\ell) := q_{n,1}(\ell + 1) = h^0(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}^n}(\ell))$ et $o_n(\ell) := q_{n,0}(\ell) = h^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\ell))$.

Lemme 6.1.1 *Le théorème 4 est vrai si pour tout entier ℓ et toute famille de points $P_1, \ldots, P_{r+1} \in \mathbf{P}^3$ en position générale :*

- $\sigma_{\ell,r} : H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \to T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_r}$ *est surjective*
- $\sigma_{\ell,r+1} : H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \to T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_{r+1}}$ *est injective.*

Démonstration :

Notons que dans le premier cas, $dim\ T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_r}$ est plus petite que $h^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell))$ et donc $\sigma_{\ell,r}$ est de rang maximale si et seulement si elle est surjective. De même, dans le second cas, $dim\ T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_{r+1}}$ est plus grande que $h^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell))$ et donc $\sigma_{\ell,r+1}$ est de rang maximale si et seulement si elle est injective.

Soit r' en entier plus petit que r. Considérons r' points de $\mathbf{P}^3$ en position générale. On complète ces r' points en en ajoutant $r - r'$ de telle sorte que les r points obtenus soient en position générale. On a alors une factorisation de $\sigma_{\ell,r'}$:

$$\begin{array}{c} H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \\ \downarrow \\ T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_r} \\ \downarrow \\ T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_{r'}} \end{array}$$

Supposons alors que $\sigma_{\ell,r}$ est surjective. Puisque la seconde flèche n'est autre que la projection canonique, évidemment surjective, $\sigma_{\ell,r'}$ l'est donc aussi.

Supposons maintenant $r'' \geq r + 1$ et considérons r'' points de $\mathbf{P}^3$ en position générale. On extrait de ces r'' points $r + 1$ d'entre eux en position générale. on a alors une factorisation de $\sigma_{\ell,r''}$:

$$\begin{array}{c} H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \\ \downarrow \\ T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_{r+1}} \\ \downarrow \\ T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_{r+1}} \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_{r+2}} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_{r''}} \end{array}$$

Supposons alors $\sigma_{\ell,r+1}$ injective. Puisque la seconde flèche n'est autre que l'injection canonique, $\sigma_{\ell,r''}$ est donc aussi injective. $\square$

Posons $s = h^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) - 3r$. Un calcul élémentaire montre que $s \in \{0, 1\}$. Soient alors $(P_1, \ldots P_r, P_{r+1})$ des points de $\mathbf{P}^3$ en position générale et pour tout quotient C de rang 1 de $T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_{r+1}}$, on définit alors un espace vectoriel E_ℓ comme suit :

- $E_\ell = T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_r} \oplus C$, si $s = 1$,
- $E_\ell = T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_r}$ sinon.

Avec ces notations on a alors le lemme suivant :

Lemme 6.1.2 *Pour que le théorème 4 soit vrai il suffit que l'application naturelle*

$$\tau_\ell : H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \to E_\ell$$

soit bijective.

Démonstration :

On a la surjection canonique

$$E_\ell \to T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_r}.$$

Or $\sigma_{\ell,r}$ est la composée de τ_ℓ et de cette surjection et si on suppose τ_ℓ bijective, $\sigma_{\ell,r}$ est donc surjective.

Le cas où le quotient C intervenant dans E_ℓ est nul est trivial, puisque dans ce cas $t_\ell = \sigma_\ell$. On suppose alors $dim\ C = 1$ et τ_ℓ bijective. On a alors le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker\ \sigma_{\ell,r+1} \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \arrow[r, "\sigma_{\ell,r+1}"] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{i=1}^{r+1} T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{P_i} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \arrow[r, "\tau_\ell"] & E_\ell
\end{tikzcd}$$

On en tire que $Ker\ \sigma_{\ell,r+1}$ est nul et que $\sigma_{\ell,r+1}$ est injective. □

Il s'en suit donc que, pour que le théorème 4 soit vrai il suffit que la proposition suivante le soit.

Proposition 6.1.3 *Avec les notations précédentes, l'application naturelle*

$$\tau_\ell : H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \to E_\ell$$

est bijective.

6.2 Deux nouveaux énoncés

Dans cette section on va introduire deux nouveaux types d'énoncés, les énoncés **RB** et **MB** qui sont des variations sur le thème des énoncés **R** et **M** (le **B** signifie "bijectif"). Comme auparavant, on considère X une variété projective lisse, et X' un diviseur non-singulier de X. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur X et

$$0 \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}|_{X'} \to \mathcal{F}' \to 0$$

une suite exacte stricte de faisceaux localement libres sur X'. On notera encore $\mathcal{E}$ le noyau du morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$. $\mathcal{E}$ est localement libre sur X et on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}'(-X') \to \mathcal{E}|_{X'} \to \mathcal{F}'' \to 0.$$

Enoncé RB$(\mathcal{F}, \mathcal{F}', z, y; \alpha, \beta)$

Soient z, y, α et β des entiers vérifiant

- $rg(\mathcal{F})z + rg(\mathcal{F}')y + \alpha + \beta = h^0(X, \mathcal{F})$
- $rg(\mathcal{F}')y + \alpha + b \leq h^0(X, \mathcal{F}')$
- $0 \leq \alpha \leq rg(\mathcal{F}')$
- si $\beta \neq 0$, $rg(\mathcal{F}') \leq \beta < rg(\mathcal{F})$,

où $b = b(\beta)$ vaut r' si β est non nul et 0 sinon.

L'énoncé $\mathbf{RB}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', z, y; \alpha, \beta)$ signifie alors la chose suivante. Il existe des points $Y_1, \ldots, Y_y$ de X' et deux point U et V de X' tels que pour tout quotient

$$\mathcal{F}'|_U \to A \to 0$$

de dimension α et si $\beta \neq 0$ pour tout quotient dépendant rationnellement des Y_i

$$\mathcal{F}|_V \to B \to 0$$

de dimension β (c'est à dire que B est une fonction rationnelle des Y_i), avec noyau contenu dans $\mathcal{F}''|_V$, (si $\beta = 0$ on pose $B = 0$), il existe z points $Z_1, \ldots, Z_z$ de X tels que l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A \oplus B \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Y_1} \oplus \ldots \mathcal{F}'|_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z_1} \oplus \ldots \mathcal{F}|_{Z_z} \end{array}$$

soit bijective.

Enoncé $\mathbf{MB}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, z, y; a : \alpha_1, \ldots \alpha_a)$

Soit maitenant

$$\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

une suite exacte stricte de faisceaux localement libres et $z, y, a, \alpha_1, \ldots \alpha_a, b, \beta_1, \ldots, \beta_b$ des entiers vérifiant

- $rg(\mathcal{F})z + rg(\mathcal{G})y + \sum_{i=1}^{a} \alpha_i + \sum_{j=1}^{b} \beta_j = h^0(X, \mathcal{F})$,
- $rg(\mathcal{G})(z + y) + \sum_{i=1}^{a} \alpha_i + b \leq h^0(X', \mathcal{F}')$
- $0 \leq \alpha_j \leq rg(\mathcal{G})$ pour $i = 1, \ldots, a$.

L'énoncé $\mathbf{MB}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', z, y; a : \alpha_1, \ldots \alpha_a)$ signifie alors la chose suivante : il existe des points $U_1, \ldots, U_a$ tels que pour tous quotients

$$\mathcal{G}|_{U_i} \to A_i \to 0$$

de dimensions respectives α_i, il existe y points $Y_1, \ldots, Y_y \in X$, il existe z points $Z_1, \ldots, Z_z \in X$ tels que l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A_1 \oplus \ldots A_a \oplus \\ & & \mathcal{G}|_{Y_1} \oplus \ldots \mathcal{G}|_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z_1} \oplus \ldots \mathcal{F}|_{Z_z} \end{array}$$

soit bijective.

6.3 Lemmes d'Horace

On va d'abord énoncer un lemme invoquant les énoncés **RB** similaire aux lemmes 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3 et permettant d'obtenir un énoncé de type **RB** à partir d'énoncés de type **R** et **RB**.

Considérons des entiers z, y, α et β vérifiant les conditions de l'énoncé $\mathbf{RB}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', z, y; \alpha, \beta)$. Par simplicité on posera

$$r := rg(\mathcal{F}) = rg(\mathcal{E}) \ , \ r' := rg(\mathcal{F}') \ et \ r'' := rg(\mathcal{F}') = r - r'.$$

On rappelle qu'on avait défini l'entier $b = b(\beta)$ comme valant r' si β est non nul et 0 sinon. Posons alors

- $t := h^0(X', \mathcal{F}') - r'y - \alpha - b$,
- y' le quotient de la division euclidienne de t par r',
- δ le reste de cette division,
- $\zeta := 1$ si $\delta \neq 0$ et 0 sinon,
- $\beta' := \zeta(r - \delta)$
- $\alpha' := \beta - r'$ si $\beta \neq 0$ et 0 sinon.
- $z' := z - y' - \zeta$

On peut alors énoncer le lemme suivant :

Lemme 6.3.1 *Soient z, y, α et β des entiers vérifiant les conditions de l'énoncé $\mathbf{RB}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', z, y; \alpha, \beta)$. Supposons que $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$ et que (avec les notations précédents le lemme) les énoncés*

$$\mathbf{R}(\mathcal{F}'; 1) \ et \ \mathbf{RB}(\mathcal{E}, \mathcal{F}'', z', y'; \alpha', \beta')$$

soient vrais. Alors l'énoncé $\mathbf{RB}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', z, y; \alpha, \beta)$ l'est aussi.

Démonstration :

Notons d'abord que l'énoncé $\mathbf{RB}(\mathcal{E}, \mathcal{F}'', z', y'; \alpha', \beta')$ a un sens ! On a en effet

$$\begin{aligned} rz' + r''y' + \alpha' + \beta' &= r(z - y' - \zeta) + r''y' + \alpha' + \beta' \\ &= r(z - \zeta) - r'y' + \alpha' + \beta' \\ &= rz - r\zeta - t + \delta + \alpha' + \beta' \\ &= rz - t + \delta(1 - \zeta) + \alpha' \end{aligned}$$

Or on remarque que $\delta(1 - \zeta)$ est nul, donc

$$\begin{aligned} rz' + r''y' + \alpha' + \beta' &= rz + r'y + \alpha + b + \alpha' - h^0(X', \mathcal{F}') \\ &= h^0(X, \mathcal{F}) - h^0(X', \mathcal{F}') - \beta + b + \alpha' \\ &= h^0(X, \mathcal{E}) - \beta + b + \alpha' \\ &= h^0(X, \mathcal{E}) \end{aligned}$$

car, puisque $H^1(X, \mathcal{E})$ est nul, on a

$$h^0(X, \mathcal{F}) = h^0(X, \mathcal{E}) + h^0(X', \mathcal{F}')$$

et par définition de α' et b on a $\beta = b + \alpha'$.

Nous allons considérer deux cas, le cas ζ nul et le cas ζ non nul. Dans le premier cas la méthode d'Horace utilisée sera la méthode simple et dans le second cas on utilisera la méthode différentielle.

On posera $\bar{B} = \mathcal{F}'|_V$ si β est non nul et $\bar{B} = 0$ sinon.

Premier cas : $\zeta = 0$

Dans cette situation notons que δ et β' sont nuls.

D'après l'hypothèse $\mathbf{R}(\mathcal{F}'; 1)$ il existe y' points de X', $Z_1, \ldots, Z'_y$ telle que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \lambda : H^0(X', \mathcal{F}') & \to & A \oplus \bar{B} \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}'|_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}'|_{Z_{y'}} \end{array}$$

soit de rang maximum, donc bijective dans ce cas. On entre alors dans le cadre du lemme 1.1.1. On conclut alors que pour tout choix de points $Z_{y'+1}, \ldots, Z_z$ dans X, l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A \oplus B \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}'|_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}|_{Z_{y'}} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z_{y'+1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}|_{Z_z} \end{array}$$

est de bijective pourvu que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{E}) & \to & A' \oplus \\ & & \mathcal{F}''|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}''|_{Z_{y'}} \\ & & \mathcal{E}|_{Z_{y'+1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}|_{Z_z} \end{array}$$

le soit (on a noté A' l'image $\mathcal{F}''|_V$ dans B). L'hypothèse $\mathbf{RB}(\mathcal{E}, \mathcal{F}'', z', y'; \alpha', 0)$ permet alors de conclure.

Second cas : $\zeta \neq 0$

D'après l'hypothèse $\mathbf{R}(\mathcal{F}'; 1)$ il existe y' points de X', $Z_1, \ldots, Z'_y$ tel que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \lambda : H^0(X', \mathcal{F}') & \to & A \oplus \bar{B} \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}'|_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}'|_{Z_{y'}} \end{array}$$

soit de rang maximum, donc surjective dans ce cas. De plus il existe un point $\tilde{Z} \in X'$ tel que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \lambda : H^0(X', \mathcal{F}') & \to & A \oplus \bar{B} \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}'|_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}'|_{Z_{y'}} \\ & & \oplus \mathcal{F}'|_{\tilde{Z}} \end{array}$$

soit injective. On rentre alors dans le cadre du lemme 1.2.1. On conclut qu'il existe un quotient

$$\mathcal{F} \to B' \to 0$$

de dimension $dim\ B' = r - dim\ ker\ \lambda = r - \delta$ avec noyau contenu dans $\mathcal{F}'|_{\tilde{Z}}$ ayant la propriété suivante : pour tout ensemble de points $Z_{y'+1}, \ldots, Z_{z-1} \in X$, il existe un point $Z_z \in X$ tel que l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A \oplus B \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Y_1} \oplus \ldots \mathcal{F}'|_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z_1} \oplus \ldots \mathcal{F}|_{Z'_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z'_y+1} \oplus \ldots \mathcal{F}|_{Z_{z-1}} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z_z} \end{array}$$

est bijective pourvue que l'application

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{E}) & \to & A' \oplus B' \oplus \\ & & \mathcal{F}''|_{Z_1} \oplus \ldots \mathcal{F}''|_{Z'_y} \oplus \\ & & \mathcal{E}|_{Z'_y+1} \oplus \ldots \mathcal{E}|_{Z_{z-1}} \end{array}$$

le soit (on a noté A' l'image $\mathcal{F}''|_V$ dans B).L'hypothèse $\mathbf{RB}(\mathcal{E}, \mathcal{F}'', z', y'; \alpha', \beta')$ permet alors de conclure.

Dans les deux cas, l'existence de choix (pour appliquer l'une ou l'autre des hypothèses du lemme) implique qu'il y a un ouvert des choix qui marchent. Les espaces de paramètres sont des produits de X ou X', ils sont alors irréductibles et les ouverts des choix possibles pour faire marcher les deux hypothèses, s'intersectent et on obtient donc $\mathbf{RB}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', z, y; \alpha, \beta)$. $\square$

On va maintenant donner un lemme d'Horace permettant d'obtenir un énoncé **RB** à partir d'un énoncé de type **R** et d'un énoncé de type **MB**, similaire au lemme 2.2.5.

Lemme 6.3.2 *Soient z, y et α des entiers vérifiant les conditions de l'énoncé* $\mathbf{RB}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', z, y; \alpha, 0)$. *Posons*

$$z' = \frac{h^0(X', \mathcal{F}|_{X'}) - r'y - \alpha}{r}$$

qu'on suppose entier *et supposons que les énoncés*

$$\mathbf{R}(\mathcal{F}(-X'), 0, 0; 0, 0, 0)$$

et

$$\mathbf{MB}(\mathcal{F}|_{X'}, \mathcal{F}', z', y, 1 : \alpha)$$

soient vrais. Alors l'énoncé $\mathbf{RB}(\mathcal{F}, \mathcal{F}', z, y; \alpha, 0)$ *l'est.*

<u>Démonstration</u> :

Notons, comme dans la démonstration du lemme précédent que l'énoncé $\mathbf{MB}(\mathcal{F}|_{X'}, \mathcal{F}', z', y, 1 : \alpha)$ a un sens ! En effet on a évidement

$$\begin{array}{rcl} rz' + r'y' + \alpha & = & h^0(X', \mathcal{F}|_{X'}) - r'y - \alpha + r'y' + \alpha + \beta \\ & = & h^0(X', \mathcal{F}|_{X'}). \end{array}$$

Puisque l'un ou l'autre des énoncés **MB** de l'hypothèse est supposé vrai, il existe z' points $Z_1, \ldots, Z_{z'} \in X'$, y' points $Y_1, \ldots, Y_y \in X'$, un point $V \in X'$, un point $U \in X'$ tel que pour tous quotients

$$\mathcal{F}' \to A \to 0$$

de dimension α tels que l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} \lambda : H^0(X', \mathcal{F}|_{X'}) & \to & A \\ & & \mathcal{F}'|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}'|_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}|_{Z_{z'}} \end{array}$$

soit bijective. On entre alors dans le cadre du lemme 1. On conclut que pour tout ensemble de points $Z_{z'+1}, \ldots, Z_z \in X$ l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathcal{F}) & \to & A \oplus \\ & & \mathcal{F}'|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}'|_{Y_y} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}|_{Z_{z'}} \oplus \\ & & \mathcal{F}|_{Z_{z'+1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}|_{Z_z} \end{array}$$

est de rang maximum, donc ici bijective pourvu que l'application

$$H^0(X, \mathcal{F}(-X')) \to \mathcal{F}|_{Z_{z'+1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}|_{Z_z}$$

le soit, ce qui est assuré avec l'hypothèse $\mathbf{R}(\mathcal{F}(-X'), 0, 0; 0, 0, 0)$. □

6.4 Preuve des énoncé $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 0)$ et $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 1)$

Bien que connu, on va redonner ici une preuve de l' énoncé $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 0)$ ainsi que celle de $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 1)$ qui est en fait une conséquence à peu prés triviale du précédent. Ces énoncé seront utilisés dans la preuve de la proposition 6.1.3.

De même que pour $T_{\mathbf{P}^3}$, on va commencer par se réduire au cas bijectif, et la preuve découlera presque immédiatement du lemme 6.3.1.

Notons que l'énoncé est trivialement vrai pour $\ell \leq -2$.

Dans la suite on posera r l'entier $[h^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell))/2]$. Le lemme suivant donne une première réduction.

Lemme 6.4.1 *Pour que l'énoncé* $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 0)$ *soit vrai il suffit que pour tout ensemble de points* $P_1, \ldots, P_{r+1} \in \mathbf{P}^2$ *en position générale, on ait :*

- $H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell)) \to T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{P_r}$ *surjective,*
- $H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell)) \to T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{P_{r+1}}$ *injective.*

Démonstration :

Identique à celle du lemme 6.1.1. $\square$

Soit s le reste de la division de $h^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell))$ par 2. Définissons alors, pour toute famille de points $P_1, \ldots, P_{r+1} \in \mathbf{P}^2$ en position générale, et pour tout quotient C de dimension s de $T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{P_{r+1}}$, l'espace vectoriel

$$E := T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{P_r} \oplus C.$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme 6.4.2 *Pour que* $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell);0)$ *soit vrai, il suffit que l'application linéaire*

$$H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell)) \to E$$

soit bijective.

Démonstration :

Identique à celle du lemme 6.1.2. $\square$

Pour montrer $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell);0)$ il suffit donc de montrer la proposition suivante.

Proposition 6.4.3 *L' application linéaire*

$$H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell)) \to E$$

est bijective.

Démonstration :

Choisissons une droite D de $\mathbf{P}^2$, quelconque si le quotient intervenant dans E est nul, et sinon on prends pour D *l'unique* droite de $\mathbf{P}^2$ vérifiant

$$C = \mathcal{O}_D(\ell+1)|_{P_{r+1}}.$$

On est alors ramené à montrer que l'énoncé

$$\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), r, s; 0, 0)$$

est vrai.

Soient z, y (resp. z', y') des entiers vérifiant les hypothèses de $\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), z, y; 0, 0)$ (resp $\mathbf{RB}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+2), z', y'; 0, 0)$. Les deux implications suivantes sont des instanciations du lemme 6.3.1 : pour tout entier ℓ',

$$\begin{gathered}\mathbf{RB}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell'+1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell'+2), z-(\ell'+2)+y, \ell'+2-y; 0, 0)\\ \Downarrow \\ \mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell'), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell'+1), z, y; 0, 0)\end{gathered}$$

et si $y' \neq 0$,

$$\begin{gathered}\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell'-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell'), z'-(\ell'+3)+y', \ell'+3-y'; 0,0)\\ \Downarrow\\ \mathbf{RB}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell'+1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell'+2), z', y'; 0,0).\end{gathered}$$

Notons alors que si $y' = 0$, l'énoncé $\mathbf{RB}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell'+1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell'+2), z', y'; 0,0)$ est trivialement vrai. En composant la seconde et la première implication, on obtient, si $y' \geq 2$,

$$\begin{gathered}\mathbf{RB}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell'), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell'+1), z'-(\ell'+2), y'-2; 0,0)\\ \Downarrow\\ \mathbf{RB}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell'+1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell'+2), z', y'; 0,0).\end{gathered}$$

Or il est clair que y' est pair, le résultat alors suit. □

L'énoncé $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 1)$ est un corollaire presque trivial de l'énoncé $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); 0)$. On supposera que le quotient intervenant dans cet énoncé est de dimension 1, sinon il n'y a rien à prouver.

Le cas où $r = h^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell))/2$ n'est pas entier est en fait déjà couvert par l'énoncé $\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1), r, 1; 0,0)$. Il reste donc à prouver l'autre cas. On utilise alors le lemme 2.2.6 pour passer de $T_{\mathbf{P}^2}(\ell)$ à $T_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)$. □

Le paragraphe suivant sera consacré à la preuve de la proposition 6.1.3. La preuve des énoncés $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^2}(\ell); a)$ avec $a = 0, 1$ sera utilisée pour instancier le lemme 6.5.2.

6.5 Preuve de la proposition 6.4

La proposition 6.1.3 se reformule, en utilisant les énoncés **RB** en :

Proposition 6.4bis *Pour tout entier ℓ, soi r le quotient de la division euclidienne de $h^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell))$ par 3 et s le reste. Alors l'énoncé*

$$\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), r, s; 0,0)$$

est vrai.

La démonstration sera faite en deux parties. La première consistera à se ramener soit à un énoncé trivial, soit à un énoncé de la forme $\mathbf{MB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell'+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell'), z', y, 1:\alpha, 1:\beta)$ La seconde partie consistera alors à prouver cet énoncé.

6.5.1 Lemmes de réduction

Avant de commencer faisons d'abord quelques remarques importantes, permettant de simplifier les énoncés. Notons d'abord que l'énoncé

$$\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), z, y; \alpha, \beta)$$

est équivalent à
$$\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), z, y+\alpha; 0, \beta).$$
On pourra donc toujours supposer α nul. Si $\beta = 1$ il est aussi équivalent à
$$\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), z, y+\alpha+\beta; 0, 0).$$
Le cas $\beta = 3$ étant par hypothèse exclus, on pourra donc toujours supposer qu'il est égal à 0 ou 2. De même, la quatrième condition dans la définition des énoncés **RB** entraîne β est nul dans l'énoncé
$$\mathbf{RB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), z, y; \alpha, \beta).$$

Soient z, y et β des entiers qui vérifient les hypothèse de l'énoncé $\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), z, y; 0, \beta)$, ainsi que des entiers z', y' et α' qui vérifient les hypothèses de l'énoncé $\mathbf{RB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), z', y'; \alpha', 0)$. Posons
- $t = T_2(\ell) - 2y' - \alpha'$,
- $\beta'' = 2$ si t est impair, $\beta'' = 0$ sinon,
- $y'' = (t-1)/2$ si $\beta'' = 2$, $y'' = t/2$ sinon,
- $z'' = z' - y'' - 1$ si $\beta'' = 2$, $z'' = z' - y''$ sinon.

On a alors les lemme suivants.

Lemme 6.5.1 *On a les implications suivantes :*
- *si* $\beta = 0$
$$\begin{gathered}\mathbf{RB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), z - o_2(\ell+1) + y, o_2(\ell+1) - y; 0, 0)\\ \Downarrow\\ \mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), z, y; 0, 0),\end{gathered}$$
- *si* $\beta = 2$
$$\begin{gathered}\mathbf{RB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), z - o_2(\ell+1) + y + 1, o_2(\ell+1) - y - 1; 1, 0)\\ \Downarrow\\ \mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), z, y; 0, 2).\end{gathered}$$

Lemme 6.5.2 *Supposons* $t \leq 2o_2(\ell)$. *Alors*
$$\begin{gathered}\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell), z'', y''; 0, \beta'')\\ \Downarrow\\ \mathbf{RB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), z', y'; \alpha', 0)\end{gathered}$$

<u>Démonstration</u> :

Ces deux lemmes sont des instanciations du lemme 6.3.1. $\square$

Lemme 6.5.3 *Supposons maintenant que $t > 2o_2(\ell)$ et $z \geq o_3(\ell) + o_2(\ell)$.*
Soit ζ l'entier $z - o_3(\ell) = o_2(\ell+1) - (2y' + \alpha')/3$ (la première condition dans la définition des énoncés **RB** *entraîne que $2y' + \alpha'$ est multiple de 3). On a alors $\zeta \geq o_2(\ell)$ et*

$$\mathbf{MB}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), \zeta, y'; 1 : \alpha')$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{RB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), z', y'; \alpha', 0)$$

Démonstration :

C'est une instanciation du lemme 6.3.2. □

Lorsqu'on a un énoncé $\mathbf{RB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), z, y; a,)$, l'entier z est toujours plus grand que $o_3(\ell)$. En effet, les conditions 1 et 2 dans la définition de ces énoncés entraînent que

$$3z \geq 3o_3(\ell+1) - T_2(\ell) = T_3(\ell-1)$$

et $T_3(\ell-1) \geq 3o_3(\ell)$. Lorsque, dans l'énoncé on a $T_2(\ell) - 2y - \alpha > 2o_2(\ell)$ en réécrivant cette dernière inégalité en tenant compte de la relation

$$3z + 2y + \alpha = 3o_3(\ell+1)$$

on obtient l'inégalité $z > o_3(\ell) + o_2(\ell)$. On peut alors utiliser le lemme 6.5.3.

L'utilisation successive de ces lemmes permet alors, partant d'un énoncé initial ou de n'importe quel énoncé $\mathbf{RB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), z, y; a, 0)$ de se réduire soit à un énoncé trivialement vrai, soit à un énoncé de la forme

$$\mathbf{MB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), \zeta, y; a : \alpha)$$

avec $\alpha = 0, 1$. Lorsque α est non nul, le quotient correspondant est indépendant des points Z_i et Y_j intervenant dans l'énoncé. Comme on le voit en suivant les procédés de réduction, dans les énoncés de la forme $\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(n), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n-1), z, x; 0, \beta)$ le quotient B de correspondant à β ne dépend que des x points sur $\mathbf{P}^2$. Mais après réduction ces x points n'interviennent plus dans l'énoncé réduit et le quotient que l'on trouve dans cet énoncé réduit est un sous-espace vectoriel de B.

Avant de poursuivre, remarquons que dans l'énoncé

$$\mathbf{MB}(2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), z, y; a : \alpha_i)$$

on peut supposer que tous les α_i sont égaux à 1, et comme on ne manipulera que des énoncés **MB** avec $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de la forme $3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)$ et $T_{\mathbf{P}^2}(\ell)$, on écrira

$$\mathbf{M}_{2,\ell}(z, y; a)$$

au lieu de

$$\mathbf{MB}(3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^2}(\ell), z, y, a : 1, \dots, 1 : 0).$$

6.5.2 Démonstration de $\mathbf{M}_{2,\ell}(z,y;a),\ a=0,1$

Les énoncés $\mathbf{M}_{2,\ell}(z,y;a)$ obtenus à partir du lemme précédent vérifient tous $a\in\{0,1\}$. La démonstration va se faire alors de la façon suivante :

Si $z\geq o_2(\ell)+1$ *:*

$$\mathbf{M}_{2,\ell-1}(z-(\ell+2),y;a)\Rightarrow\mathbf{M}_{2,\ell}(z,y;a) \tag{6.5.2.1}$$

Si $z=o_2(\ell)$ *:*

- si $a<\ell+2$ (en fait $a\leq n$)

$$M_{2,\ell-1}(o_2(n-1),y-2;a+1)\Rightarrow\mathbf{M}_{2,\ell}(z,y;a) \tag{6.5.2.2}$$

- si $a=\ell+2$ alors $y=\ell+2$ et $\mathbf{M}_{2,\ell}(o_2(\ell),\ell+2;\ell+2)$ est vrai.

Soit D une droite de $\mathbf{P}^2$ que l'on notera $\mathbf{P}^1$ dans la suite. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell) \arrow[u] \arrow[r] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1) \arrow[u] \arrow[r] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell) \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0 \\
 & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1) \arrow[u] \arrow[r, equal] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-1) \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

et, par transformation élémentaire le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1) \arrow[u] \arrow[r] & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell-1) \arrow[u] \arrow[r] & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1) \arrow[u] \arrow[r] & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1) \arrow[u] \arrow[r] & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell) \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0 \\
 & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-2) \arrow[u] \arrow[r, equal] & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-2) \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Le quotient

$$3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \to T^2_{\mathbf{P}} \to 0$$

devient

$$2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \to 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \to 0.$$

par cette transformation.

Démonstration de l'implication 6.5.2.1

La preuve reposera sur une double utilisation du lemme 1.1.1. On va distinguer deux cas, $a = 0$ et $a = 1$.

le cas $a = 0$.

Il existe $\ell + 2$ points $Z_1, \ldots, Z_{\ell+2} \in \mathbf{P}^1$ tels que l'application naturelle

$$\lambda : H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+2}}$$

soit bijective. On entre dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que pour tout ensemble de points $Z_{\ell+3}, \ldots, Z_z \in \mathbf{P}^2$, il existe y points $Y_1, \ldots, Y_y \in \mathbf{P}^2\mathbf{P}^1$ tels que l'application

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) & \to & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_y} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{\ell+2}} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{\ell+3}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_z} \end{array}$$

est bijective pourvue que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mu : H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)) & \to & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_y} \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+2}} \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{\ell+3}} \oplus \cdots \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_z} \end{array}$$

le soit. Or l'application

$$\lambda' : H^0(\mathbf{P}^1, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) \to 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+2}}$$

est bijective. On rentre alors une nouvelle fois dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que μ est bijective pourvu que l'application

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) & \to & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_y} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{\ell+3}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_z} \end{array}$$

le soit.

le cas $a = 1$.

Soit donc $U \in \mathbf{P}^2$, et pour chaque quotient A de dimension 1 de $T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_U$, soit D *l'unique droite* de $\mathbf{P}^2$ telle que $A = \mathcal{O}_D(\ell+1)|_U$. On la notera $\mathbf{P}^1$.

Il existe $\ell+1$ points $Z_1, \ldots, Z_{\ell+1} \in \mathbf{P}^1$ tel que l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} \lambda : H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) & \to & A \oplus \\ & & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+1}} \end{array}$$

soit bijective. On rentre alors dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que pour tout ensemble de points $Z_{\ell+2}, \ldots, Z_z \in \mathbf{P}^2$, il existe y points $Y_1, \ldots, Y_y \in \mathbf{P}^2\mathbf{P}^1$ tels que l'application

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) & \to & A \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_y} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{\ell+1}} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{\ell+2}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_z} \end{array}$$

est bijective pourvue que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mu : H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)) & \to & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_y} \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+1}} \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{\ell+2}} \oplus \cdots \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_z} \end{array}$$

le soit. Au lieu d'étudier l'application μ, on va étudier l'application μ' dans laquelle on suppose que $Z_{\ell+1} \in \mathbf{P}^1$. Puisque la propriété d'être de rang maximum est ouverte, si μ' est bijective, μ le sera aussi. Dans ce cas, l'application naturelle

$$\lambda' : H^0(\mathbf{P}^1, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) \to 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+2}}$$

est bijective. On rentre alors dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que μ est bijective pourvu que l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+2}} \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_y} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{\ell+3}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_z} \end{array}$$

le soit. $\square$

Démonstration de l'implication 6.5.2.2

Comme pour la précédente, elle repose sur plusieurs utilisations du lemme 1.1.1. On se donne un entier $a < \ell+2$ et a points $U_1, \ldots, U_a$ *appartenant à une même droite* $D \subset \mathbf{P}^2$ et pour chaque U_i un quotient de dimension 1

$$T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{U_i} \to A_i \to 0.$$

On suppose que $A_i = \mathcal{O}_D(\ell+1)|_{U_i}$, ce qui sera justifié par les calculs. Comme d'habitude, D sera notée $\mathbf{P}^1$. On posera a' l'entier $\ell+2-a$.

Il existe a' points $Z_1, \dots, Z_{a'} \in \mathbf{P}^1$ tels que l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl}\lambda : H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) & \to & A_1 \oplus \cdots \oplus A_a \oplus \\ & & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{a'}}\end{array}$$

soit bijective. On rentre alors dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que pour tout ensemble de points $Z_{a'+1}, \dots, Z_{o_2(\ell)} \in \mathbf{P}^2$, pour tout ensemble de points $Y_1, \dots, Y_Y \in \mathbf{P}^2$, l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl}\nu : H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)) & \to & A_1 \oplus \cdots \oplus A_a \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_y} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{a'}} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{a'+1}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{o_2(\ell)}}\end{array}$$

est bijective pourvue que l'application

$$\begin{array}{rcl}\mu : H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)) & \to & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_y} \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{a'}} \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{a'+1}} \oplus \cdots \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{o_2(\ell)}}\end{array}$$

le soit.

Au lieu d'étudier l'application μ, on va étudier l'application μ' dans laquelle on suppose que $Z_{a'}, \dots, Z_{\ell+1} \in \mathbf{P}^1$ (un calcul direct montre que $\ell+1 \leq o_2(\ell)$), et que Y_1 Y_2 sont dans $\mathbf{P}^1$ (la seul valeur de ℓ pour laquelle $y < 2$ est -2, et dans ce cas, $y = 0$ ainsi que a, ce qui est contraire à l'hypothèse $a < \ell+2$). Puisque la propriété d'être de rang maximum est ouverte, si μ' est bijective, μ le sera aussi.
On va décomposer $2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Y_i},\ i = 1, 2$ en

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)|_{Y_i} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+2)|_{Y_i}$$

à l'aide de la suite exacte d'Euler sur $\mathbf{P}^1$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \to 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \to 0.$$

Dans cette situation, l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl}\lambda' : H^0(\mathbf{P}^1, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)) & \to & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+1}} \oplus \\ & & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+2)|_{Y_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+2)|_{Y_1}\end{array}$$

est bijective. En effet, posons

$$\begin{array}{rcl}L & = & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+1}} \oplus \\ & & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+2)|_{Y_1}, \\ M & = & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{Z_{\ell+1}} \oplus \\ & & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+2)|_{Y_2}.\end{array}$$

Alors les applications naturelles

$$\lambda_1 : H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)) \to L \ \ et \ \ \lambda_1 : H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)) \to M$$

sont bijectives. On applique alors le lemme 1.1.1 pour conclure.

Puisque λ' est bijective, on rentre dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que μ' et par suite μ est bijective pourvu que l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)) & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)_{Z_{a'+1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)_{Z_{\ell+1}} \oplus \\ & & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)_{Y_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell)_{Y_2} \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_3} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_y} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{\ell+2}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{o_2(\ell)}} \end{array}$$

le soit.

Remarque 6.5.4 *Justifiant l'hypothèse faite au début de la démonstration, on voit que les points* $Z_{a'+1}, \ldots, Z_{\ell+1}, Y_1, Y_2 \in \mathbf{P}^1$

Pour finir il suffit de noter que $\ell + 1 - a' + 2 = a + 1$ et $o_2(\ell) - \ell + 1 = o_2(\ell - 1)$. □

Démonstration de $\mathbf{M}_{2,\ell}(o_2(\ell), \ell+2; \ell+2)$

On se donne $\ell + 2$ points $U_1, \ldots, U_{\ell+2} \in \mathbf{P}^1$ et pour chaque U_i un quotient de dimension 1

$$T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{U_i} \to A_i \to 0.$$

On suppose, comme dans l'étape précédente, que $A_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\ell+1)|_{U_i}$
La preuve consiste alors à utiliser le lemme 1.1.1 avec la suite exacte d'Euler su $\mathbf{P}^2$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \to 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1) \to T_{\mathbf{P}^2}(\ell) \to 0.$$

Soient $Z_1, \ldots, Z_{o_2(\ell)}, Y_1, \ldots, Y_{\ell+2} \in \mathbf{P}^2 \backslash \mathbf{P}^1$ en position générale. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \lambda : H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell)) & \to & A_1 \oplus \cdots \oplus A_{\ell+2} \\ & & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_{\ell+2}} \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{o_2(\ell)}} \end{array}$$

est bijective. On utilise pour cela le lemme 1.1.1. En effet, l'application

$$\lambda : H^0(\mathbf{P}^2, T_{\mathbf{P}^2}(\ell)) \to A_1 \oplus \cdots \oplus A_{\ell+2}$$

l'est, ainsi que

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathbf{P}^2, 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)) & \to & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_{\ell+2}} \oplus \\ & & 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{o_2(\ell)}}. \end{array}$$

Il faut ici noter que $o_2(\ell) + \ell + 2 = o_2(\ell + 1)$.

λ étant bijective, on applique le lemme 1.1.1 et on obtient que

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)) \quad \rightarrow \quad & A_1 \oplus \cdots \oplus A_{\ell+2} \\ & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_{\ell+2}} \oplus \\ & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{o_2(\ell)}} \end{aligned}$$

est bijective puisque

$$H^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{o_2(\ell)}}$$

l'est trivialement.

Ceci conclut la preuve de la proposition 6.1.3 et du théorème 4. $\square$

Chapitre 7

Rang maximum pour $\mathrm{T}_{\mathbf{P}^4}$

Dans ce court chapitre on donne un résultat plus complet pour l'énoncé $\mathbf{R}(T_{\mathbf{P}^4}(\ell); 0)$. On va montrer le théorème suivant.

Théorème 5 *Soient $P_1, \ldots, P_a$ une famille de points de $\mathbf{P}^4$ en position générale. Alors pour* pour tout entier *ℓ l'application naturelle d'évaluation*

$$H^0(\mathbf{P}^4, T_{\mathbf{P}^4}(\ell)) \to T_{\mathbf{P}^4}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^4}(\ell)|_{P_z}$$

est de rang maximum.

La démonstration de ce théorème est essentiellement du même type que celle du théorème 4. Notons que ce théorème est trivialement vrai pour $\ell \leq -2$.

Comme dans le chapitre précédent nous allons nous réduire au cas bijectif et utiliser des énoncés de type **RB** et **MB**.

7.1 Réduction du problème

Pour tout entier ℓ posons $z = z(\ell)$ et $\beta = \beta(\ell)$ respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $T_4(\ell) := h^0(\mathbf{P}^4, T_{\mathbf{P}^4}(\ell))$ par 4.

On a alors le lemme suivant

Lemme 7.1.1 *Pour que le théorème 5 soit vrai, il suffit que pour toute famille $P_1, \ldots, P_{z+1}$ de points de $\mathbf{P}^4$ en position générale et pour tout quotient $T_{\mathbf{P}^4}|_{P_{z+1}} \to B \to 0$ de dimension $\beta(ell)$, le morphisme de restriction*

$$H^0(\mathbf{P}^4, T_{\mathbf{P}^4}(\ell)) \to T_{\mathbf{P}^4}(\ell)|_{P_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^4}(\ell)|_{P_z} \oplus B$$

soit un isomorphisme.

Démonstration :

Elle est identique à celle du chapitre précédent. □

Choisissons un hyperplan $H \subset \mathbf{P}^4$ contenant le point P_{z+1}. Cet hyperplan sera noté $\mathbf{P}^3$. Le théorème 5 peut alors se reformuler de la façon suivante.

Théorème 6 . *Pour tout entier ℓ, l'énoncé*

$$\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^4}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(\ell+1), z(\ell), 0; 0, \beta(\ell))$$

est vrai.

7.2 Preuve du théorème 6

Comme au chapitre précédent, on donnera une preuve par réduction successive pour arriver soit à des énoncés triviaux, soit à des résultats connus. Le principe sera le même que celui de la preuve de la proposition 6.4 bis.

D'abord quelques remarques simplificatrices :

L'énoncé

$$\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^4}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), z, y; \alpha, \beta)$$

est équivalent à

$$\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^4}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), z, y+\alpha; 0, \beta)$$

puisque, par hypothèse $0 \leq \alpha \leq 1$. On supposera donc α nul.

De même, l'énoncé

$$\mathbf{RB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z, y; \alpha, \beta)$$

est équivalent à

$$\mathbf{RB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z, y+\beta; \alpha, 0)$$

puisque par hypothèse β vaut 0 ou 1. On supposera donc β nul.

La démonstration se fera en deux étapes, la première consistera à réduire l'énoncé initial $\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^4}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), z(\ell), 0; 0, \beta(\ell))$ à un énoncé soit trivialement vrai soit de la forme $\mathbf{MB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell'+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell'), \zeta, \eta; 1 : \alpha, 0)$. La preuve de ce dernier sera l'objet de la seconde étape.

7.2.1 Première étape : réduction des énoncés RB

Dans ce paragraphe on énonce trois lemmes qui ne sont que les exactes répliques des lemmes 6.5.1, 6.5.2 et 6.5.3, et qui vont nous permettre de réduire le problème à celui de démontrer un énoncé de type **MB**.

Soient z, y et β des entiers vérifiant les hypothèses de l'énoncé $\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^4}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), z, y; 0, \beta)$ et z', y' et α' des entiers vérifiant les hypothèses de l'énoncé $\mathbf{RB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z', y'; \alpha', 0)$. Posons

- $t = T_3(\ell) - 3y' - \alpha'$,
- u le reste de la division euclidienne de t par 3,
- $\beta'' = 0$ si $u = 0$, $\beta'' = 4 - u$ sinon,
- $y'' = (t - u)/3$ si $\beta'' \neq 0$, $y'' = t/3$ sinon,
- $z'' = z - y'' - 1$ si $\beta'' \neq 0$, $z'' = z - y''$ sinon.

Lemme 7.2.1 *On a les implications suivantes.*
- *si* $\beta = 0$

$$\begin{gathered}\mathbf{RB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z - o_3(\ell+1) + y, o_3(\ell+1) - y; 0, 0)\\ \Downarrow\\ \mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^4}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), z, y; 0, 0)\end{gathered}$$

- *si* $\beta = 2$ *ou 3*

$$\begin{gathered}\mathbf{RB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z - o_3(\ell+1) + y + 1, o_3(\ell+1) - y - 1; \beta - 1, 0)\\ \Downarrow\\ \mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^4}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), z, y; 0, \beta)\end{gathered}$$

Lemme 7.2.2 *Supposons* $t \leq 3o_3(\ell)$*. Alors*

$$\begin{gathered}\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^4}(\ell-1), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell), z'', y''; 0, \beta'')\\ \Downarrow\\ \mathbf{RB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z', y'; \alpha', 0)\end{gathered}$$

<u>Démonstration</u> :

Ces deux lemmes sont des instanciations du lemme 6.3.1. □

Lemme 7.2.3 *Supposons* $t > 3o_3(\ell)$*. Soit* ζ *l' entier* $z - o_4(\ell) = o_3(\ell+1) - (3y' + \alpha')/4$ *(la première condition dans la définition des énoncés* **RB** *entraîne que* $(3y' + \alpha')/4$ *est entier). Alors si* $z \geq o_4(\ell) + o_3(\ell)$ *on a*

$$\begin{gathered}\mathbf{MB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \zeta, y', 1 : \alpha')\\ \Downarrow\\ \mathbf{RB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z', y'; \alpha', 0)\end{gathered}$$

<u>Démonstration</u> :

C'est une instanciation du lemme 6.3.2. □

Dans l'énoncé $\mathbf{RB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z, y; a, 0)$ l'entier z est toujours plus grand que $o_4(\ell)$. En effet, des deux premières conditions des énoncés **RB** on tire que

$$4z \geq 4o_4(\ell+1) - T_3(\ell) = T_4(\ell-1)$$

et ce dernier est plus grand que $4o_4(\ell)$. Lorsque, dans l'énoncé on a $T_3(\ell) - 3y - \alpha > 3o_3(\ell)$ en réécrivant cette dernière inégalité en tenant compte de la relation

$$4z + 3y + \alpha = 4o_4(\ell+1)$$

on obtient l'inégalité $z > o_4(\ell) + o_3(\ell)$. On peut alors utiliser le lemme 7.2.3. Ces lemmes nous permettent de réduire le problème initial soit des énoncé trivialement vrais (c'est le cas par exemple lorsqu'on veut démontrer l'énoncé $\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^4}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(1), 6, 0; 0, 0)$ qui après utilisation successive des lemmes 7.2.1, 7.2.2 et encore 7.2.1 se réduit à $\mathbf{RB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}, T_{\mathbf{P}^3}(-1), 1, 0; 0, 0)$ qui est trivialement vrai) soit à des énoncés du type $\mathbf{MB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z, y, 1 : \alpha, 0)$.

Il faut alors noter que dans ce dernier énoncé, le quotient de dimension α intervenant est indépendant des points Z_i et Y_j (voir le chapitre précédent).

7.2.2 Seconde étape : lemmes de réduction pour les énoncés M

Soit H un plan de $\mathbf{P}^3$ qu'on notera $\mathbf{P}^2$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \arrow[r] \arrow[u] & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-1) \arrow[r] \arrow[u] & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\
 & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-1) \arrow[r, equal] \arrow[u] & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-1) \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

et, par transformation élémentaire le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1) \arrow[r] \arrow[u] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell-1) \arrow[r] \arrow[u] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-1) \arrow[r] \arrow[u] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-1) \arrow[r] \arrow[u] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell) \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\
 & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-2) \arrow[r, equal] \arrow[u] & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell-2) \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

On va utiliser ces diagrammes avec les lemmes d'Horace vectoriels pour réduire l'énoncé

$$\mathbf{MB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \zeta, y', 1 : \alpha', 0)$$

à un énoncé de la forme

$$\mathbf{MB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell'+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell'), o_3(\ell'), y, a : \alpha_1, \dots, \alpha_a, 0).$$

avec $\ell' \leq \ell$.

On fera l'hypothèse qu'au plus un des α_i vaut 2 les autres étant égaux à 1, ce qui est vrai lorsqu'on manipule les énoncés initiaux et qui sera confirmé par les lemmes de réduction. On notera $U_1, \dots, U_a$ les supports des quotients de dimension 1 $A_1, \dots, A_a$ et s'il y a lieu, V le support du quotient de dimension 2. On supposera que les points $U_1, \dots, U_a$ et V sont tous dans un même plan H que l'on notera $\mathbf{P}^2$. Le quotient

$$4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_V \to B \to 0$$

de dimension 2 sera supposé à noyau dans $3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)$ ce qui aussi est vrai dans les énoncés initiaux et qui sera confirmé dans les démonstrations.

Pour simplifier, on écrira $\mathbf{M}_{3,\ell}(z, y; a, b)$ au lieu $\mathbf{MB}(4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1), T_{\mathbf{P}^3}(\ell), z, y, a+1 : 1, \dots, 1, b)$ avec $b = 0$ ou 2. On fera une dernière hypothèse, elle aussi clairement vraie dans les énoncés initiaux et confirmée dans les démonstrations, à savoir que $a + b/2 \leq o_2(\ell+1)$.

Dans tous les lemmes de ce paragraphe, excepté le dernier, on supposera $\ell \geq 0$. Lorsque $\ell = -1$ on ne peut avoir que

$$\mathbf{M}_{3,-1}(1, 0; 0, 0) \textit{ ou } \mathbf{M}_{3,-1}(0, 1; 1, 0).$$

Le premier de ces énoncés est trivialement vrai, le dernier est conséquence du dernier lemme de ce paragraphe. On supposera aussi que dans l'énoncé $\mathbf{M}_{3,-1}(z, y; a, b)$ $z \neq o_3(\ell+1)$ qui est trivialement vrai.

Lemme 7.2.4 *Soient z, y et a des entiers vérifiant les hypothèses de $\mathbf{M}_{3,\ell}(z, y; , a, 0)$. Supposons que $z \geq o_3(\ell-1) + o_2(\ell+1)$.*

Alors pour que $\mathbf{M}_{3,\ell}(z, y; , a, 0)$ soit vrai, il suffit que $\mathbf{M}_{3,\ell-1}(z - o_2(\ell+1), y; , a, 0)$ le soit.

<u>Démonstration</u> :

Posons $c = o_2(\ell+1) - a$. Il existe c points $Z_1, \dots, Z_c$ de $\mathbf{P}^2$ tels que l'application

$$\begin{array}{rcl} \lambda : H^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)) & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{U_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{U_a} \oplus \\ & & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_c} \end{array}$$

soit bijective. On rentre dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que pour toute famille de points $Z_{c+1}, \dots, Z_z \in \mathbf{P}^3$ et toute famille de points $Y_1, \dots, Y_y \in \mathbf{P}^3$ l'application

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathbf{P}^3, 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)) & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{U_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{U_a} \oplus \\ & & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_c} \oplus \\ & & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Z_{c+1}} \oplus \cdots \oplus 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Z_z} \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Y_y} \end{array}$$

est bijective pourvu que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mu : H^0(\mathbf{P}^3, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)) & \to & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_c} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_{c+1}} \oplus \dots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_z} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Y_y} \end{array}$$

le soit.

Au lieu d'étudier l'application μ on va s'intéresser à l'application μ' dans laquelle on suppose les points $Z_{c+1}, \ldots, Z_{o_2(\ell+1)} \in \mathbf{P}^2$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \lambda' : H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)) \quad &\rightarrow \quad 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_c} \oplus \\ &\qquad 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{c+1}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{o_2(l+1)}} \end{aligned}$$

est bijective pour un choix de points suffisamment général. On rentre alors dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que μ' et donc μ sont bijectives pourvu que l'application

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{P}^3, 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \quad &\rightarrow \quad \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{c+1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{o_2(\ell)}} \oplus \\ &\qquad 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_{o_2(\ell)}} \oplus \cdots \oplus 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_z} \oplus \\ &\qquad T_{\mathbf{P}^3}(\ell-1)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell-1)|_{Y_y} \end{aligned}$$

le soit. On note alors que $o_2(\ell+1) - c = a$ et l'hypothèse $\mathbf{M}_{3,\ell-1}(z - o_2(\ell+1), y; a, 0)$ entraîne donc le résultat cherché. On note aussi que les points $Z_{c+1}, \ldots, Z_{o_2(\ell+1)} \in \mathbf{P}^2$. $\square$

Lemme 7.2.5 *Soient z et y des entiers vérifiant les hypothèses de $\mathbf{M}_{3,\ell}(z, y; , 0, 2)$. Supposons que $z \geq o_3(\ell-1) + o_2(\ell+1) - 1$.*

Alors pour que $\mathbf{M}_{3,\ell}(z, y; , 0, 2)$ soit vrai, il suffit que $\mathbf{M}_{3,\ell-1}(z - o_2(\ell+1) + 1, y - 1; , 1, 0)$ le soit.

Démonstration :

Posons $c = o_2(\ell+1) - 1$. Il existe c points $Z_1, \ldots, Z_c$ de $\mathbf{P}^2$ tels que l'application

$$\begin{aligned} \lambda : H^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)) \quad &\rightarrow \quad \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_V \oplus \\ &\qquad \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_c} \end{aligned}$$

soit bijective. On rentre dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que pour toute famille de points $Z_{c+1}, \ldots, Z_z \in \mathbf{P}^3$ et toute famille de points $Y_1, \ldots, Y_y \in \mathbf{P}^3$, l'application

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{P}^3, 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)) \quad &\rightarrow \quad B \oplus \\ &\qquad 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_c} \oplus \\ &\qquad 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Z_{c+1}} \oplus \cdots \oplus 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Z_z} \oplus \\ &\qquad T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Y_y} \end{aligned}$$

est bijective pourvu que, en notant B' l'image de $3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)$ dans B, l'application

$$\begin{aligned} \mu : H^0(\mathbf{P}^3, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \quad &\rightarrow \quad B' \oplus \\ &\qquad 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_c} \oplus \\ &\qquad 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_{c+1}} \oplus \ldots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_z} \oplus \\ &\qquad 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Y_y} \end{aligned}$$

le soit. Au lieu de considérer μ on va considérer μ' dans laquelle on suppose $Z_{c+1}, \ldots, Z_{o_2(\ell+1)-1}$ et $Y_y \in \mathbf{P}^2$. Notons que y ne peut être nul. L'application

$$\begin{aligned} \lambda' : H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)) \quad &\rightarrow \quad B' \oplus \\ &\qquad 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_c} \oplus \\ &\qquad 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{c+1}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_{o_2(l+1)-1}} \\ &\qquad T_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_y} \end{aligned}$$

est bijective pour un choix de points suffisamment général. C'est en effet l'énoncé $\mathbf{M}_{2,\ell}(o_2(\ell+1)-1,1,1)$, que l'on a prouvé au chapitre précédent. On rentre une nouvelle fois dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que μ' et donc μ sont bijectives pourvu que l'application

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{P}^3, 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \quad \rightarrow \quad & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{c+1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Z_{o_2(\ell+1)-1}} \oplus \\ & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_y} \oplus \\ & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_{o_2(\ell+1)}} \oplus \cdots \oplus 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_z} \oplus \\ & T_{\mathbf{P}^3}(\ell-1)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell-1)|_{Y_{y-1}} \end{aligned}$$

le soit. On note alors que $o_2(\ell+1)-1-c+1=1$ et l'hypothèse $\mathbf{M}_{3,\ell-1}(z-o_2(\ell+1)+1, y-1; 1, 0)$ entraîne alors le résultat cherché. □

On va maintenant donner un lemme de réduction pour les énoncés $\mathbf{M}_{3,\ell}(z,y;a,0)$ avec $a=0,1$ et

$$o_3(\ell)+1 \le z < o_3(\ell-1)+o_2(\ell+1).$$

Soit d l'entier $z-o_3(\ell-1)$. Puisque $z \ge o_3(\ell)$ on a $d \ge o_2(\ell)+1 < o_2(l+1)$ puisqu'on a supposé $\ell \ge 0$.

Lemme 7.2.6 *Soit e l'entier $o_2(\ell+1)-d$.*

- *Supposons e pair. Alors pour que $\mathbf{M}_{3,\ell}(z,y;a,0)$ soit vrai, il suffit que $\mathbf{M}_{3,\ell-1}(o_3(\ell-1), y-3e/2; e/2+a, 0)$ le soit.*
- *Supposons e impair. Alors pour que $\mathbf{M}_{3,\ell}(z,y;a,0)$ soit vrai, il suffit que $\mathbf{M}_{3,\ell-1}(o_3(\ell-1)+1, y-3(e+1)/2; (e+1)/2+a, 0)$ le soit.*

Démonstration :

Cas $o_2(\ell+1)-d$ pair

Montrons d'abord que $y \ge 3e/2$. De

$$4z+3y+a = 4o_3(\ell+1) \text{ et } z \le o_3(\ell-1)+o_2(\ell+1)-1$$

on tire que

$$y \ge \frac{1}{3}(4o_2(\ell)+3)$$

et de même on voit que $e \le o_1(\ell+1)-1$ le calcul donne

$$y - 3e/2 \ge \frac{2\,l^2}{3} + \frac{l}{2} + 5/6$$

et cette dernière quantité est strictement positive. On a évidement $e/2 < o_2(l+1)$.

Posons $c = o_2(\ell+1)-d-a$. Il existe d points $Z_1,\ldots,Z_d \in \mathbf{P}^2$ et c points$Y_1,\ldots,Y_c \in \mathbf{P}^2$ tels que l'application

$$\begin{aligned} \lambda : H^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)) \quad \rightarrow \quad & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{U_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{U_a} \oplus \\ & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_d} \oplus \\ & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_c} \end{aligned}$$

soit bijective. On rentre alors dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut que pour toute famille de points $Z_{d+1}, \ldots, Z_z \in \mathbf{P}^3$ et pour toute famille de points $Y_{c+1}, \ldots, Y_y \in \mathbf{P}^3$ l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathbf{P}^3, 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)) & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{U_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{U_a} \oplus \\ & & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Z_d} \oplus \\ & & 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Z_{d+1}} \oplus \cdots \oplus 4\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_z} \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Y_c} \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Y_{c+1}} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Y_y} \end{array}$$

est bijective pourvu que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mu : H^0(\mathbf{P}^3, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)) & \to & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_d} \oplus \\ & & T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_c} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_{d+1}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell)|_{Z_z} \oplus \\ & & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\ell+1)|_{Y_{c+1}} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Y_y} \end{array}$$

le soit. A la place de μ on va étudier l'application μ' dans laquelle on suppose les points $Y_{c+1}, \ldots, Y_{3e/2} \in \mathbf{P}^2$. Alors, pour un choix suffisamment général des points Z_i et Y_j l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \lambda' : H^0(\mathbf{P}^2, 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)) & \to & 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell+1)|_{Z_d} \oplus \\ T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^2}(\ell)|_{Y_{3e/2}} & & \end{array}$$

est bijective. C'est en effet l'énoncé $\mathbf{M}_{2,\ell}(d, 3e/2; 0)$ que l'on a prouvé au chapitre précédent (on a vu que $d \geq o_2(\ell) + 1$). On rentre alors dans le cadre du lemme 1.1.1 et on conclut comme précédemment. Les conditions résiduelles sont alors au nombre de $3e/2 - c = e/2 + a$.

Cas $o_2(\ell+1) - d$ impair

La preuve est pratiquement identique à la précédente. □

On donne maintenant un lemme de réduction pour les énoncés $\mathbf{M}_{3,\ell}(z, y; 0, 2)$ avec toujours

$$o_3(\ell) + 1 \leq z < o_3(\ell-1) + o_2(\ell+1).$$

Lemme 7.2.7 *On note toujours d l'entier $z - o_3(\ell - 1)$. Posons $e = o_2(\ell + 1) - d + 1$.*

- *Supposons e pair. Alors pour que $\mathbf{M}_{3,\ell}(z, y; 0, 2)$ soit vrai il suffit que $\mathbf{M}_{3,\ell}(o_3(\ell), y - 3e/2 + 2; e/2, 0)$ le soit.*
- *Supposons e impair. Alors pour que $\mathbf{M}_{3,\ell}(z, y; 0, 2)$ soit vrai il suffit que $\mathbf{M}_{3,\ell}(o_3(\ell), y - 3(e - 1)/2 + 2; (e + 1)/2, 0)$ le soit.*

Démonstration :

Elle est identique à la précédente.

On va maintenant s'intéresser à $\mathbf{M}_{3,\ell}(o_3(\ell) + 1, y; a, 0)$. On supposera que a est plus petit que $(\ell + 2)$. Lorsqu'on utilise les deux lemmes précédents, après réduction, si on obtient un énoncé $\mathbf{M}_{3,\ell}(o_3(\ell) + 1, y; a, 0)$ alors $a \leq (\ell + 2)/2$. C'est pourquoi on peut se placer dans le cadre $a \leq (\ell + 2)$.

Lemme 7.2.8 *On va distinguer deux cas, comme dans le lemme précédent :*

- *Supposons ℓ impair. Alors, pour que $\mathbf{M}(o_3(\ell) + 1, y, a, 0)$ soit vrai, il suffit que $\mathbf{M}_{3,\ell-1}(o_3(\ell - 1), y - 3/2(\ell + 1); (\ell + 1)/2 + a, 0)$ le soit.*
- *Supposons ℓ pair. Alors, pour que $\mathbf{M}(o_3(\ell) + 1, y, a, 0)$ soit vrai, il suffit que $\mathbf{M}_{3,\ell-1}(o_3(\ell - 1) + 1, y - 3/2(\ell + 2); (\ell + 2)/2 + a, 0)$ le soit.*

Démonstration :

Elle est similaire à celle du lemme 7.2.6. Il faut juste faire attention au cas où $a = \ell + 2$. Notons que dans le premier cas, a ne peut être égal à $(\ell + 2)/2$, car sinon $(\ell + 1)/2 + a = \ell + 3/2$ qui n'est pas entier !

Pour finir, voici le dernier lemme de réduction.

Lemme 7.2.9 *Soit y, a et b des entiers vérifiant les conditions de l'énoncé $\mathbf{M}_{3,\ell}(o_3(\ell), y; a, b)$. Alors cet énoncé est vrai.*

Démonstration :

Il faut noter ici que $3(o_3(\ell) + y) + a + b = h^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell))$. L'application

$$\begin{aligned} \lambda : H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \quad \rightarrow \quad & T_{\mathbf{P}^3}|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}|_{Z_{o_3(\ell)}} \oplus \\ & T_{\mathbf{P}^3}|_{Y_1} \oplus \cdots \oplus T_{\mathbf{P}^3}|_{Y_y} \oplus \\ & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}|_{U_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}|_{U_a} \\ & B \end{aligned}$$

est bijective. C'est l'énoncé $\mathbf{RB}(T_{\mathbf{P}^3}(\ell), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\ell + 1), o_3(\ell) + y, a; 0, b)$ qui a été prouvé au chapitre précédent. Il s'en suit que pour que $\mathbf{M}_{3,\ell}(o_3(\ell), y; a, b)$ soit vrai, il suffit que l'application

$$H^0(\mathbf{P}^3, T_{\mathbf{P}^3}(\ell)) \rightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}|_{Z_{o_3(\ell)}}$$

soit bijective (on utilise la méthode d'Horace"classique"), ce qui est évidement le cas lorsque les points Z_i sont en position suffisamment générale. □

7.2.3 Réduction des énoncés M

On va maintenant utiliser les lemmes du paragraphe précédent pour réduire les énoncés

$$\mathbf{M}_{3,\ell}(z, y, a, b)$$

initiaux. On va distinguer 5 cas de figure.

1. $b = 0$ et $z \geq o_3(\ell - 1) + o_2(\ell + 1)$.
2. $b \neq 0$ et $z \geq o_3(\ell - 1) + o_2(\ell + 1)$.
3. $b = 0$ et $o_3(\ell) + 1 \leq z < o_3(\ell - 1) + o_2(\ell + 1)$.
4. $b \neq 0$ et $o_3(\ell) + 1 \leq z < o_3(\ell - 1) + o_2(\ell + 1)$.
5. $z = o_3(\ell)$

(le cas où $z = o_3(\ell + 1)$ est trivial).

Premier cas

Dans ce cas $a = 0$ ou 1. On utilise autant de fois que possible le lemme 7.2.4 jusqu'à réduire l'énoncé initial à un énoncé de la forme $\mathbf{M}_{3,\ell'}(z', y', a, 0)$ avec $\ell' \leq \ell$ et $z' < o_3(\ell' - 1) + o_2(\ell' + 1)$. Si $z' = o_3(\ell')$ on conclut par le lemme 7.2.9. Sinon on se ramène au troisième cas.

Second cas

On utilise le lemme 7.2.5, on obtient un énoncé

$$\mathbf{M}_{3,\ell-1}(z - o_2(\ell + 1) - 1, y - 1, 1, 0)$$

qui rentre dans le premier, le troisième ou le cinquième cas.

Troisième cas

On utilise soit le lemme 7.2.5 soit le lemme 7.2.8. On obtient alors l'un des deux énoncés
- $\mathbf{M}_{3,\ell'-1}(o_3(\ell' - 1), y_1, a_1, 0)$
- $\mathbf{M}_{3,\ell'-1}(o_3(\ell' - 1) + 1, y_2, a_2, 0)$.

Dans le premier cas, $a_1 < o_2(\ell')$ (voir la preuve du lemme), on conclut alors par le lemme 7.2.9.

Dans le second cas, une à deux utilisations successives du lemme 7.2.8 réduisent l'énoncé à

$$\mathbf{M}_{3,n}(o_3(n), y_3, a_3, 0).$$

avec $n = \ell' - 2$ ou $\ell' - 3$. On calcule facilement a_3 et on constate qu'il est plus petit que $o_2(n + 1)$ (la différence $o_2(n + 1) - a_3$ est minorée par $\frac{(n+1)}{2}^2$). On conclut alors par le lemme 7.2.9.

Quatrième cas

On utilise ici le lemme 7.2.7 qui permet de se réduire au troisième ou au cinquième cas.

Cinquième cas

On utilise le lemme 7.2.9.

On a donc traité tous les cas de figure et le théorème 5 est donc prouvé. $\square$

Bibliographie

[Ba] E. Ballico : *Generators for the Homogeneous Ideal of s General Points in* $\mathbf{P}^3$, J. Algebra **106** (1987) 46-52.

[Ba-Ge] E. Ballico, A.V Geramita : *The minimal free resolution on s general points in* $\mathbf{P}^3$, Can. Math. Soc Conf. Proc **6** (1986), 1-10.

[Ha] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry* Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag New York - Berlin - Heidelberg 1977.

[Ha-Hi] R. Hartshorne, A. Hirschowitz : *Droites en position générale dans l'espace projectif*, Algebraic Geometry, Proc La Rabida 1981, Lecture Notes in Math **961**, Springer-Verlag New York - Berlin - Heidelberg.

[Hi1] A. Hirschowitz : *Sur la postulation générique des courbes rationnelles*, Acta Math. **146** (1981), 209-230.

[Hi2] A. Hirschowitz : *La Méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables*, Manuscripta Math. **50** (1985), 337-388.

[Hi3] A. Hirschowitz : *Lettre à R. Hartshorne*, non publiée.

[Hi-Si] A. Hirschowitz, C. Simpson : *La résolution minimale de l'idéal d'un arrangement général d'un grand nombre de points dans* $\mathbf{P}^N$, à paraître.

[Id] M. Idà : *On the homogeneous ideal of lines in general position in* $\mathbf{P}^3$, J. für reine und angew. Math **403** (1990),67-153.

[Ma] M. Maruyama : *Elementary transformations in the theory of algebraic vector bundles*, Algebraic Geometry, Proc La Rabida 1981, Lecture Notes in Math **961**, Springer-Verlag New York - Berlin - Heidelberg.

[OSS] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler : *Vector Bundles on Complex Projectives Spaces*, Basel - Stuttgart - Boston 1980.

[Ra] O.F. Rahavandrainy : *Résolution des fibrés instantons généraux*, thèse Nice 1991.

[Wa] C. Walter : *the minimal free resolution of the homogeneous ideal of s general points in* $\mathbf{P}^4$, à paraître, Math. Zeit.

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la résolution minimale des idéaux d'arrangement de points en position générale dans les espaces projectifs. Carlos Simpson et André Hirschowitz réduisent le problème à un calcul de rang maximal (c'est à dire surjectivité ou injectivité) pour les morphismes de restriction

$$H^0(\mathbf{P}^n, \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)) \to \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)|_{Z_s}$$

où $Z_1, \ldots, Z_s$ sont des points de $\mathbf{P}^n$. Ils montrent ensuite que pour un grand nombre de points ou de façon équivalente pour un degré ℓ suffisamment grand, on a la propriété de rang maximal. Ils déduisent cette propriété , grâce à la méthode d'Horace, d'un certain nombres de situations de rang maximal modulo les dimensions 2 et 3. Dans cette thèse on étudie et prouve systématiquement le rang maximal pour ces situations en dimension 2 et 3. On donne aussi une borne inférieure du degré pour laquelle ces énoncés sont valables. Le chapitre 6 montre comment, en raffinant les procédés de Simpson et Hirschowitz, obtenir une preuve de l'énoncé déjà connu pour $T_{\mathbf{P}^3}(\ell)$. Le chapitre 7 reprend alors la méthode pour obtenir une preuve pour $T_{\mathbf{P}^4}(\ell)$.

Mots-clés : *rang maximum, méthode d'Horace, faisceaux localement libres, transformations élémentaires.*

Abstract

The goal of this work is to study the minimal resolution of ideals of union of points in general position in projective spaces. Carlos Simpson and André Hirschowitz reduce the problem to a maximal rank computation (that is surjectivity or injectivity) for the restriction morphisms

$$H^0(\mathbf{P}^n, \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)) \to \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)|_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}(\ell)|_{Z_s}$$

where $Z_1, \ldots, Z_s$ are points in $\mathbf{P}^n$. They show that for a large number of points or equivalently for a degree ℓ large enough, one has the maximal rank property. They obtain this property, using la "méthode d'Horace", from a certain number of maximal rank situations assumming maximal rank property for the situations in dimension 2 and 3. In this thesis the maximal rank property for those situations in dimension 2 and 3 is proven. A lower bound for the degree for which those properties are available is given. In chapter 6 it is shown, using some refinement in the method of Simpson and Hirschowitz, how to get a proof of the already known property for $T_{\mathbf{P}^3}(\ell)$. In chapter 7, the refined method is used to get a proof for $T_{\mathbf{P}^4}(\ell)$.

Key-words :*maximal rank, méthode d'Horace, locally-free sheaves, elementary transformations.*