Generel Lektorteori
En Oversigt

Pawel Søndertoft
Hother Sesgaard

I det følgende gives en oversigt over teorien for lektorer og lektorfunktioner. Studiet af lektorer går mange år tilbage, men har først vundet virkelig interesse i de senere år efter opdagelsen af ikke-trivielle lektorfunktioner. Denne oversigt er så vidt vides den første præsentation af emnet på dansk.

Afsnit 1 resumerer de centrale begreber og definitioner inden for teorien. Afsnit 2 skitserer begrebet lektorrum, medens afsnit 3 diskuterer det såkaldte lektorflytningsproblem. Endelig gennemgås i afsnit 4 teorien for lektorfunktioner, og der afsluttes med en konklusion i afsnit 5.

1. Grundlæggende Begreber

Lektorer, der er helt i vinkel, kaldes *regelrette*. Lektorer, som ikke er regelrette, kaldes *kontrære* og indgår i den meget omfattende klasse af *ikke-regulære* lektorer. Denne klasse kan vises at indeholde klassen af såkaldt *obstruktivt influente* lektorer, der, skønt den er af stor praktisk betydning, ikke vil blive nærmere behandlet her. For en grundig behandling af en anden vigtig delklasse af de kontrære lektorer, de såkaldte *udartede* lektorer, se [Oberlehrer 1938].

En *nul-lektor* er karakteriseret ved ikke at have positive normer. Hele problematikken omkring normal-lektorer, lektornormer og lektoridealer har atter påkaldt sig betydelig og stigende interesse inden for de sidste år. For en ældre, noget kontroversiel behandling af emnet henvises til [Oberlehrer 1933].

Til enhver lektor er knyttet en såkaldt *lektorfunktion*, der da siges at være induceret af lektoren. Vi vender tilbage til teorien for lektor-funktioner nedenfor. Vi minder her blot om at to lektorer ofte siges at være *konkurrente*, eller indbyrdes indignerede, hvis de tilhørende lektorfunktioner er næsten-identiske.

En uorganiseret mængde $\mathbf{G}$ af lektorer kaldes en *lektorgruppe* hvis følgende tre betingelser er opfyldt:

1. Sammensætningen i $\mathbf{G}$ er asocial,
2. $\mathbf{G}$ indeholder en nul-lektor, og
3. der er altid en lektor der er modsat.

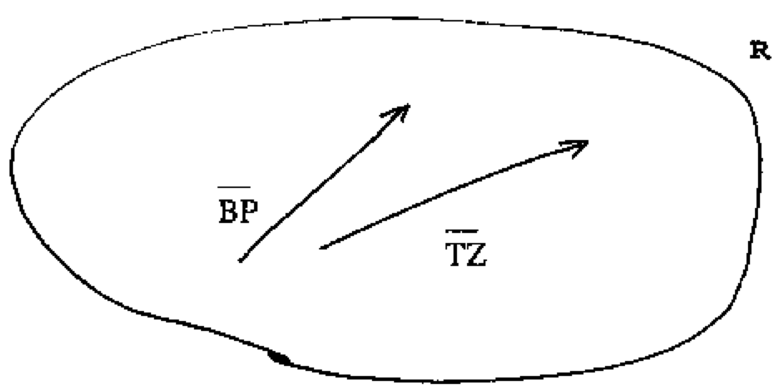
En *altererende lektorgruppe* er karakteriseret ved ikke at have nogen normale undergrupper.

2. Lektorrum

Begrebet *lektorrum* er velkendt og vi vil ikke kede læseren med den nøjagtige definition her. Blot vil vi minde om at inden for lektorrum kan lektornormer bestemmes alene ud fra kendskab til de såkaldte *indre lektorprodukter*.

Blandt afbildningerne mellem lektorrum studeres særligt de lineære afbildninger, og blandt disse igen specielt de såkaldte *lektorflytninger*, som vil blive diskuteret nærmere nedenfor. Det eneste resultat, vi skal anføre her, er at for en vilkårlig lektorflytning $\mathbf{f}: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{P}_1$ er originalmængden for flytningen identisk med mængden af samtlige lektorer.

Lektorer inden for samme lektorrum $\mathbf{R}$ siges at være *sammensatte*, eller *kontubernale* (se Figur 1).



Figur 1: Sammensatte lektorer

3. Lektorflytninger

Lad der være givet en lektorgruppe **G**. Vi er interesseret i mængden af *mulige lokale fordelinger* af **G** ved en flytning **f** med egenskaberne at

1. Alle sammensatte lektorer skal være i vinkel og ikke konkurrente.

2. Fordelingen skal være *acceptabel*, det vil sige at til enhver undergruppe af lektorer fra **G**, som omfatter en obstruktivt influent lektor findes et (topologisk) lukket delrum, som kun indeholder denne lektor.

Den herved bestemte klasse af lektorflytninger kaldes klassen af *mulige* (eller *gennemførlige*) *flytninger*.

Det kan nemt vises at denne definition af de mulige lektorflytninger er ækvivalent med den følgende, som ofte er nemmere at arbejde med:

1. Flytningen giver kun anledning til konkurrente kontubernale lektorer, hvis disse tillige er normale.

2. Hvis (ved flytningen) en lektor i en undergruppe af en lektorgruppe **G** kun er indeholdt i åbne delrum, kan denne lektor ikke være obstruktivt influent med hensyn til gruppen **G**.

Ikke-acceptable fordelinger kan vises at medføre lokal divergens. Problemet er i øvrigt langt fra trivielt, idet sammensatte lektorer næsten altid viser sig at blive udartede (jvfr. eksemplet i Figur 1).

4. Lektorfunktioner

I dette afsnit gives en oversigt over de væsentligste bidrag til teorien for lektorfunktioner.

En lektorfunktion f_1 hørende til lektoren 1 siges at være *triviel* dersom den er *næsten-identisk* (dss. *produktivt ækvivalent*) med funktionen induceret af en nul-lektor. Bemærk, at eksistensen af trivielle lektorfunktioner således er oplagt.

Egenværdi for en lektorfunktion defineres på oplagt vis, og det er velkendt at de trivielle lektorfunktioner er karakteriseret ved alene at have egenværdi 0.

Først for nylig er det lykkedes at påvise eksistensen af *ikke-trivielle* lektorfunktioner [Errant-Schreiber 1983]. Beviset er et kompliceret modstridsbevis, og vi kan ikke komme ind på detaljerne her. Der er aldrig givet et konstruktivt bevis for sætningen, og den antages i almindelighed ikke af intuitionister.

Mængden af lektorfunktioner og dennes struktur er derimod indgående studeret. Det er i dag velkendt, at der er tale om en direkte sum $\mathbf{U} \oplus \mathbf{F} \oplus \mathbf{A}$, og at projektionerne af lektorfunktioner på disse komponenter er væsentlig simplere at beskrive end de egentlig lektorfunktioner.

Projektionerne af lektorfunktioner på $\mathbf{U}$ betegnes siden den banebrydende artikel [Colle 1978] *lexioner*, og de udgør et lovende forskningsfelt der allerede har produceret flere betydningsfulde resultater. Særlig velkendte er de såkaldte *monotone* (uendelige) *lexionsrækker* og de *klassedelinger*, lexionerne bestemmer.

Opdelingen i underrum $\mathbf{U} \oplus \mathbf{F} \oplus \mathbf{A}$ finder også anvendelse inden for den såkaldte *lektorproduktmodel*, hvor lektorer i det væsentligste anskues som *frembringere* af artikler. Se [Vaillant-Bâtard 1980] for detaljer.

Som bekendt er flertallet af lektorfunktioner *tidsinvariante* (enkelte forskere foretrækker at bruge betegnelserne *stabile*, eller *fortsatte*); således er for eksempel alle trivielle lektorfunktioner oplagt tidsinvariante.

Nyere undersøgelser har imidlertid focuseret på *næsten-tidsinvariante* lektorfunktioner, og det er lykkedes at påvise eksistensen af hvad der med sprogbrug lånt fra fysikken betegnes lektorfunktioner induceret af *periodisk exciterede* lektorer. Stadig set med fysikkens briller siger man at sådanne exciterede lektorer er *ustabile* og *henfalder* til normal-lektorer under udsendelse af en eller flere *elementar-artikler*. Se [Blackboard 1981] for en sådan "fysisk" fortolkning af lektorfunktions-begrebet og dets relationer til lektorprodukt modellen.

5. Konklusion

Vi har i det foregående fremstillet visse hovedtræk af teorien for lektorer og lektorfunktioner, et aktivt og frugtbart forskningsfelt, der alt for længe har været forsømt hertillands. Det seneste årti har set en formelig renæssance for lektorteorien, ansporet af interessen for svar på de mange uløste spørgsmål, som vil få betydelige konsekvenser for vore højere uddannelsesinstitutioner, særlig hvad angår deres muligheder mht. udvikling og tilpasning til det højteknologiske samfunds krav til almene specialiserede, billige og fleksible uddannelser.

Vi vil indskrænke os til at nævne to sådanne åbne spørgsmål af stor potentiel vigtighed. For det første, påstanden om eksistensen af ikke-trivielle lektorfunktioner (se ovenfor). Der arbejdes ihærdigt på et konstruktivt bevis for denne påstand, men området er særdeles vanskeligt at arbejde med, da det rummer mange tilsyneladende paradokser og har adskillige anti-intuitive egenskaber.

Dette problem er beslægtet med det andet uløste problem, nemlig en beregnelighedsteori (i klassisk forstand) for området. Det antages således almindeligvis at alle lektorfunktioner er enten uberegnelige eller trivielle, ligesom man anser ord-problemet for vindskæve lektorer for uafgørligt, men denne teoribygning er meget ufuldstændig og praktiske bevisteknikker savnes aldeles.

Modtaget 20. december 1985.
Optaget 23. januar 1986.

6. Litteratur

[Blackboard 1981]
Blackboard, J. *Elementary Articles and Plain Lector Superficiality.* Barren Publ. Co., London 1981.

[Colle 1978]
Colle, E. *Théorie des Leçons Comprehensibles et Non-comprehensibles.* Salaud-Gaillard, Paris 1978.

[Errant-Schreiber 1983]
Errant-Schreiber, J.-J. Non-trivial lector functions exist: An application of the axiom of choice. *Trans. Awkward Math. Soc. 53*, 2 (maj 1983) 310-358.

[Oberlehrer 1933]
Oberlehrer, T. Lektornormen und Lektorideale. Eine Neubegründung. *Deutsche Vierteljahrsschrift für Mathematische und Formale Gesellschaftswissenschaften 2*, 3 (juli 1933) 51-72.

[Oberlehrer 1938]
Oberlehrer, T. *Die Theorie der Entarteten Lektoren.* Schwamm-Drüber, Berlin 1938.

[Vaillant-Bâtard 1980]
Vaillant-Bâtard, P. Sur produits abrutis et hébétants. *Actes de la Recherche en Sciences Socio-mathématiques 18*, 7 (1980) 666-687.